

Modélisation quadratique

Prélude - Historique et contexte

La parabole est étudiée dès l'Antiquité par les Grecs (Ménéchme, Apollonius) comme section d'un cône. Au XVII^e siècle, Galilée montre que la trajectoire d'un projectile lancé est une parabole. On retrouve cette courbe dans les arches de ponts, les antennes paraboliques, les phares de voiture ou encore dans des modèles économiques : le chiffre d'affaires en fonction du prix de vente augmente puis diminue.

I Les fonctions $x \mapsto ax^2$ et $x \mapsto ax^2 + c$

Définition

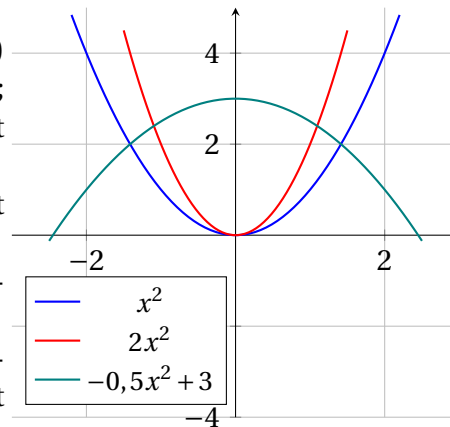
Une **fonction polynôme de degré 2** est une fonction de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$. Sa courbe représentative est une **parabole**.

Propriété

Pour $f(x) = ax^2$:

- la parabole a pour sommet l'origine $O(0 ; 0)$ et pour axe de symétrie l'axe des ordonnées ;
- si $a > 0$, elle est « tournée vers le haut » : f est décroissante puis croissante ;
- si $a < 0$, elle est « tournée vers le bas » : f est croissante puis décroissante ;
- plus $|a|$ est grand, plus la parabole est resserrée.

Pour $f(x) = ax^2 + c$, la parabole est la même, décalée verticalement de c : son sommet est le point $(0 ; c)$.



Exemple

Tableau de variations de $f(x) = -2x^2 + 5$: $a = -2 < 0$, le sommet est $(0 ; 5)$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$ 5 $\searrow$		

II La forme factorisée $a(x - x_1)(x - x_2)$

Propriété

Soit $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ avec $a \neq 0$.

- Les **racines** de f (solutions de $f(x) = 0$) sont x_1 et x_2 : ce sont les abscisses des points d'intersection de la parabole avec l'axe des abscisses.
- L'axe de symétrie de la parabole est la droite d'équation $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$; l'abscisse du sommet est donc la moyenne des racines.
- $f(x)$ est du signe de a à l'extérieur des racines et du signe opposé entre les racines.

Exemple

$f(x) = 2(x-1)(x-5)$. Les racines sont 1 et 5. L'axe de symétrie est $x = 3$ et le sommet est $S(3 ; f(3)) = (3 ; -8)$.

x	$-\infty$	1	5	$+\infty$
$f(x)$		+	-	+

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f(x)$		-8	

III Le cas général $ax^2 + bx + c$

Méthode - Trouver l'axe de symétrie

Aucune formule n'est à connaître. Pour $f(x) = ax^2 + bx + c$, on résout $f(x) = c$:

$$ax^2 + bx + c = c \iff ax^2 + bx = 0 \iff x(ax + b) = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x = -\frac{b}{a}.$$

Les points d'abscisses 0 et $-\frac{b}{a}$ ont la même ordonnée c : ils sont symétriques par rapport à l'axe de la parabole. L'abscisse du sommet est donc le milieu de ces deux valeurs.

Exemple

$$f(x) = x^2 - 6x + 5. \quad f(x) = 5 \iff x^2 - 6x = 0 \iff x(x - 6) = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x = 6.$$

L'axe de symétrie est $x = 3$ et le sommet est $(3 ; f(3)) = (3 ; -4)$. Comme $a = 1 > 0$, f est décroissante sur $] -\infty ; 3]$ et croissante sur $[3 ; +\infty[$; son minimum est -4 .

Exemple - Modélisation

Un ballon est lancé ; sa hauteur (en m) après t secondes est $h(t) = -5t^2 + 10t + 1,5$.

$h(t) = 1,5 \iff -5t^2 + 10t = 0 \iff -5t(t - 2) = 0 \iff t = 0 \text{ ou } t = 2$. Le sommet est atteint pour $t = 1$: hauteur maximale $h(1) = 6,5$ m.