Fonctions affines

Prélude - Historique et contexte

Le mot « fonction » apparaît chez Leibniz à la fin du XVII^{e} siècle, mais l'idée de proportionnalité est bien plus ancienne : les tablettes babyloniennes contiennent déjà des tables de prix proportionnels aux quantités. Les fonctions affines modélisent toutes les situations où une grandeur varie **à vitesse constante** : tarif avec abonnement, mouvement uniforme, conversion des degrés Celsius en Fahrenheit ($F = 1,8C + 32$). En Première, elles servent de base à la dérivation : dériver une fonction, c'est l'approcher localement par une fonction affine (la tangente).

I Fonctions affines

Définition

Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est **affine** s'il existe deux réels m et p tels que pour tout réel x : $\boxed{f(x) = mx + p}$.

- m est le **coefficient directeur**, p est l'**ordonnée à l'origine** ($p = f(0)$).
- Si $p = 0$, f est **linéaire** (situation de proportionnalité) ; si $m = 0$, f est **constante**.

Propriété - Taux de variation

f est affine si et seulement si son taux de variation est constant : pour tous réels $a \neq b$,

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = m.$$

Autrement dit : quand x augmente de 1, $f(x)$ augmente de m ; les accroissements de $f(x)$ sont proportionnels aux accroissements de x.

Exemple

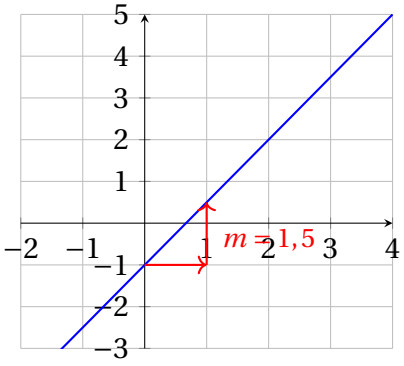
f est affine avec $f(2) = 7$ et $f(5) = 16$. Alors $m = \dfrac{16 - 7}{5 - 2} = 3$ et $p = f(2) - 3 \times 2 = 1$: $f(x) = 3x + 1$.

II Représentation graphique

Propriété

La courbe représentative d'une fonction affine $x \mapsto mx + p$ est la **droite** d'équation $y = mx + p$.

- Elle coupe l'axe des ordonnées au point $(0\ ;\ p)$.
- En partant d'un point de la droite, si on avance de 1 horizontalement, on monte de m (ou on descend si $m < 0$).



Méthode - Lire m et p sur un graphique

On lit p à l'intersection avec l'axe des ordonnées, puis on choisit deux points A et B de la droite à coordonnées entières : $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

III Variations et signe

Propriété - Sens de variation

- Si $m > 0$, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- Si $m < 0$, f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
- Si $m = 0$, f est constante.

Propriété - Signe de $mx + p$ ($m \neq 0$)

$mx + p = 0 \iff x = -\dfrac{p}{m}$. Le signe de $mx + p$ est celui de m à droite de $-\dfrac{p}{m}$ et le signe contraire à gauche.

x	$-\infty$		$-\frac{p}{m}$		$+\infty$
$mx+p$ ($m>0$)		$-$	0	$+$	

x	$-\infty$		$-\frac{p}{m}$		$+\infty$
$mx+p$ ($m<0$)		$+$	0	$-$	

Exemple - Signe d'un produit

Signe de $(2x-6)(-x+1)$: $2x-6=0 \iff x=3$ et $-x+1=0 \iff x=1$.

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$2x-6$		$-$		$-$	0	$+$	
$-x+1$		$+$	0	$-$		$-$	
$(2x-6)(-x+1)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc $(2x-6)(-x+1) \geqslant 0 \iff x \in [1\,;\,3]$.

IV Modéliser avec une fonction affine

Exemple

Une société de location facture 35 € par jour plus 0,20 € par kilomètre. Pour une journée, le prix en fonction du nombre x de kilomètres est $P(x) = 0,2x + 35$.
Une autre société facture 0,30 € par kilomètre sans forfait : $Q(x) = 0,3x$.
$P(x) < Q(x) \iff 35 < 0,1x \iff x > 350$: la première société est plus avantageuse au-delà de 350 km.
⚠ Une situation est modélisée par une fonction affine lorsque la variation est **constante** (et non proportionnelle à la valeur, comme pour une évolution en pourcentage).