Nombres complexes (1)

Prélude - Historique et contexte

Au XVI^{e} siècle, les mathématiciens italiens Cardan et Bombelli, en cherchant à résoudre des équations du troisième degré, sont amenés à manipuler des « racines carrées de nombres négatifs ». Descartes les qualifie d'« imaginaires ». Euler introduit la notation i en 1777, puis Gauss et Argand leur donnent une représentation géométrique dans le plan. Aujourd'hui, les nombres complexes sont l'outil de base de l'électricité (impédances, régime sinusoïdal) et du traitement du signal.

I Forme algébrique

Définition

Il existe un ensemble de nombres, noté $\mathbb{C}$, appelé ensemble des **nombres complexes**, qui contient $\mathbb{R}$ et vérifie :

- il contient un nombre i tel que $\boxed{i^2 = -1}$;
- tout nombre complexe z s'écrit de manière unique $z = a + ib$ avec a et b réels ;
- on y calcule avec les mêmes règles que dans $\mathbb{R}$.

L'écriture $z = a + ib$ est la **forme algébrique** de z ; $a = \text{Re}(z)$ est la **partie réelle** et $b = \text{Im}(z)$ la **partie imaginaire**. Si $a = 0$, z est un **imaginaire pur**.

Propriété

Deux nombres complexes sont égaux si et seulement s'ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire. En particulier, $a + ib = 0 \iff a = 0$ et $b = 0$.

Méthode - Somme et produit

On développe en utilisant $i^2 = -1$.

$(2+3i) + (1-5i) = 3-2i$; $\quad (2+3i)(1-5i) = 2-10i+3i-15i^2 = 2-7i+15 = 17-7i$.

II Conjugué et quotient

Définition - Conjugué

Le **conjugué** de $z = a + ib$ est $\overline{z} = a - ib$.

On a $z\overline{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2 + b^2$: c'est un réel positif.

Propriété - Conjugué et opérations

Pour tous nombres complexes z et z' : $\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$; $\quad \overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$; $\quad \overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$ $(z' \neq 0)$.

Méthode - Quotient

Pour écrire un quotient sous forme algébrique, on multiplie numérateur et dénominateur par le conjugué du dénominateur :

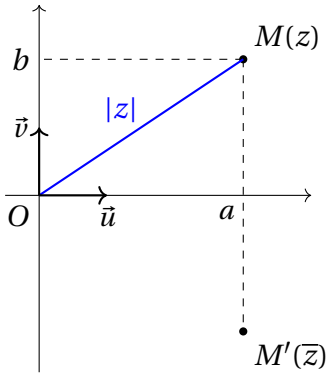
$$\frac{3+i}{1-2i} = \frac{(3+i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{3+6i+i+2i^2}{1^2+2^2} = \frac{1+7i}{5} = \frac{1}{5} + \frac{7}{5}i.$$

III Représentation géométrique et module

Définition - Affixe

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\,\vec{u},\vec{v})$.

- Au nombre $z = a+ib$, on associe le point $M(a\,;\,b)$: M est l'**image** de z et z est l'**affixe** de M.
- L'affixe du vecteur $\vec{w}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ est $a+ib$. Si A et B ont pour affixes z_A et z_B, le vecteur $\vec{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$.
- L'image de $\overline{z}$ est le symétrique de M par rapport à l'axe des abscisses.



Définition - Module

Le **module** de $z = a+ib$ est le réel positif $\boxed{|z| = \sqrt{a^2+b^2}}$. C'est la distance OM.

On a $|z|^2 = z\overline{z}$, et $AB = |z_B - z_A|$.

Propriété - Module d'un produit et d'un quotient

Pour tous nombres complexes z et z' : $|z \times z'| = |z| \times |z'|$ et $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$ $(z' \neq 0)$.

Exemple : $\left|\dfrac{3+4i}{1-i}\right| = \dfrac{\sqrt{9+16}}{\sqrt{1+1}} = \dfrac{5}{\sqrt{2}} = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$.

Exemple - Distance

A et B ont pour affixes $z_A = 1+2i$ et $z_B = 4-2i$: $AB = |z_B - z_A| = |3-4i| = \sqrt{9+16} = 5$.