Nombres complexes (2)

Prélude - Historique et contexte

En 1806, le Suisse Jean-Robert Argand propose de représenter un nombre complexe par un point du plan, repéré par une distance et un angle. Cette idée, reprise par Gauss, permet de voir la multiplication par un nombre complexe comme une rotation suivie d'un agrandissement. En électricité, Steinmetz l'utilise dès 1893 pour calculer les circuits en courant alternatif : le module donne l'amplitude, l'argument donne le déphasage.

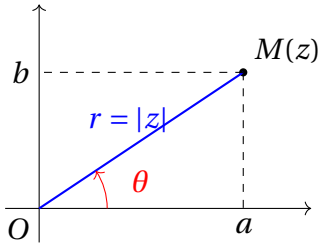
I Argument d'un nombre complexe

Définition

Soit z un nombre complexe **non nul** et M son image dans un repère orthonormé direct $(O\,;\,\vec{u},\vec{v})$.

On appelle **argument** de z, noté $\arg(z)$, toute mesure en radians de l'angle orienté $(\vec{u},\overrightarrow{OM})$.

Un nombre complexe non nul a une infinité d'arguments, qui diffèrent d'un multiple de 2π. On donne souvent la mesure principale, dans $]-\pi\,;\,\pi]$.



Propriété

Si $z = a + ib$ est non nul, de module r et d'argument θ, alors $\boxed{a = r\cos\theta}$ et $\boxed{b = r\sin\theta}$, c'est-à-dire

$$\cos\theta = \frac{a}{r} \qquad \text{et} \qquad \sin\theta = \frac{b}{r}.$$

Exemples

$\arg(3) = 0$; $\arg(-2) = \pi$; $\arg(5i) = \dfrac{\pi}{2}$; $\arg(-i) = -\dfrac{\pi}{2}$; $\arg(1+i) = \dfrac{\pi}{4}$.

II Forme trigonométrique

Définition

Tout nombre complexe non nul z de module r et d'argument θ s'écrit $\boxed{z = r(\cos\theta + i\sin\theta)}$: c'est une **forme trigonométrique** de z.

Méthode - Passer de la forme algébrique à la forme trigonométrique

Pour $z = 1 - i\sqrt{3}$:

- on calcule le module : $r = \sqrt{1+3} = 2$;
- on cherche θ tel que $\cos\theta = \dfrac{1}{2}$ et $\sin\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$: par lecture sur le cercle trigonométrique, $\theta = -\dfrac{\pi}{3}$;
- on conclut : $z = 2\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right)$.

Méthode - Passer de la forme trigonométrique à la forme algébrique

$$z = 4\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = 4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = -2\sqrt{3} + 2i.$$

Propriété - Égalité

Deux nombres complexes non nuls sont égaux si et seulement s'ils ont le même module et des arguments égaux à un multiple de 2π près.

III Module et argument d'un produit, d'un quotient

Propriété (admise)

Pour tous nombres complexes non nuls z et z' :

$\lvert zz'\rvert = \lvert z\rvert \times \lvert z'\rvert$	$\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')$ (à 2π près)
$\left\lvert\frac{z}{z'}\right\rvert = \frac{\lvert z\rvert}{\lvert z'\rvert}$	$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$ (à 2π près)

De plus $|\overline{z}| = |z|$ et $\arg(\overline{z}) = -\arg(z)$.

Exemple

$z = 1 + i$ (module $\sqrt{2}$, argument $\frac{\pi}{4}$) et $z' = \sqrt{3} + i$ (module 2, argument $\frac{\pi}{6}$).

zz' a pour module $2\sqrt{2}$ et pour argument $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{12}$; $\frac{z}{z'}$ a pour module $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et pour argument $\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12}$.

Exemple - Interprétation en électricité

Si une tension et une intensité sinusoïdales sont représentées par des nombres complexes U et I, l'impédance est $Z = \frac{U}{I}$. Le module $|Z| = \frac{|U|}{|I|}$ est le rapport des amplitudes et l'argument $\arg(Z) = \arg(U) - \arg(I)$ est le **déphasage** de la tension par rapport à l'intensité.