Dérivation

Prélude - Historique et contexte

À la fin du XVII^{e} siècle, Isaac Newton et Gottfried Wilhelm Leibniz inventent indépendamment le **calcul différentiel**. Newton cherche à décrire la vitesse instantanée des planètes ; Leibniz cherche la tangente à une courbe. Leur querelle de priorité divisera l'Europe savante pendant des décennies. Les notations $f'(x)$ (Lagrange) et $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ (Leibniz) sont toujours utilisées. La dérivée mesure une **vitesse de variation** : vitesse, débit, coût marginal, intensité électrique.

I Taux de variation et nombre dérivé

Définition - Taux de variation

Soit f définie sur un intervalle I, $a \in I$ et $h \neq 0$ tel que $a+h \in I$. Le **taux de variation** de f entre a et $a+h$ est

$$\tau(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

C'est le coefficient directeur de la sécante passant par $A(a\,;\,f(a))$ et $M(a+h\,;\,f(a+h))$.

Définition - Nombre dérivé

f est **dérivable en** a si $\tau(h)$ tend vers un nombre réel ℓ quand h tend vers 0. Ce nombre est le **nombre dérivé** de f en a :

$$\boxed{f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}}.$$

Exemple

$f(x) = x^2$ et $a = 3$: $\dfrac{(3+h)^2-9}{h} = \dfrac{6h+h^2}{h} = 6+h$, qui tend vers 6 quand $h \to 0$. Donc $f'(3) = 6$.

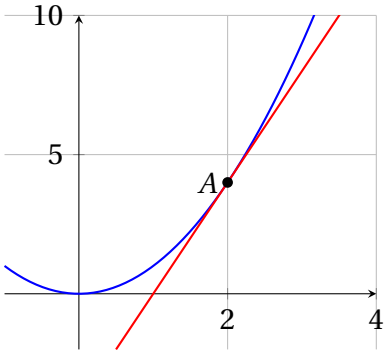
II Tangente à une courbe

Définition - Propriété

Si f est dérivable en a, la **tangente** à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point $A(a\,;\,f(a))$ est la droite passant par A de coefficient directeur $f'(a)$. Son équation est

$$\boxed{y = f'(a)(x-a)+f(a)}.$$

Graphiquement, $f'(a)$ se lit comme le coefficient directeur de la tangente.



Exemple

Tangente à la parabole $y = x^2$ en $a = 2$: $f(2) = 4$, $f'(2) = 4$, donc $y = 4(x-2)+4 = 4x-4$.

III Notations et approximation affine

Notations

En sciences, si $y = f(x)$, on note $\Delta x = h$ la variation de x et $\Delta y = f(x_0+h) - f(x_0)$ celle de y. Le taux de variation en x_0 se note $\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_{x_0}$ et le nombre dérivé :

$$f'(x_0) = \left(\frac{dy}{dx}\right)(x_0) = \frac{d}{dx}f(x_0).$$

Exemple : si $x(t)$ est la position d'un mobile, $\frac{dx}{dt}(t_0)$ est sa vitesse instantanée à l'instant t_0.

Propriété - Approximation affine

Pour h proche de 0, la courbe de f est proche de sa tangente en x_0 :

$$\boxed{f(x_0+h) \approx f(x_0) + f'(x_0) \times h}$$

Exemple : $f(x) = x^2$, $x_0 = 3$, $f'(3) = 6$: $3,01^2 = f(3+0,01) \approx 9+6\times 0,01 = 9,06$ (valeur exacte : $9,0601$).