Généralités sur les fonctions

Prélude - Historique et contexte

Le mot « fonction » est introduit par Leibniz en 1673 ; la notation $f(x)$ est due à Euler (1734). Une fonction décrit la façon dont une grandeur dépend d'une autre : le prix payé en fonction de la quantité achetée, la température en fonction de l'heure, le chiffre d'affaires en fonction du prix de vente.

I Différents modes de représentation

Définition

Une **fonction** f définie sur un ensemble D associe à chaque nombre x de D un unique nombre noté $f(x)$, appelé **image** de x. On note $f : x \mapsto f(x)$ ou $y = f(x)$.
Si $f(x) = y$, on dit que x est **un antécédent** de y.

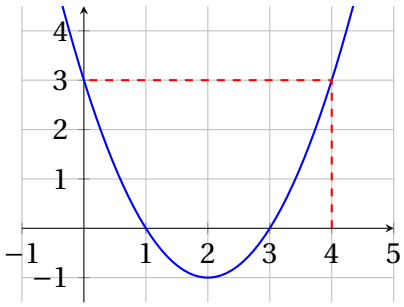
Exemple - Expression littérale

Le coût de fabrication de x objets est $C(x) = 0,5x^2 + 10x + 200$ (en euros).
Image de 10 : $C(10) = 50 + 100 + 200 = 350$: fabriquer 10 objets coûte 350 €.

Définition - Courbe représentative

Dans un repère, la **courbe représentative** $\mathscr{C}_f$ de f est l'ensemble des points de coordonnées $(x ; f(x))$.

- Lire l'image de a : on part de a sur l'axe des abscisses, on rejoint la courbe, on lit l'ordonnée.
- Lire les antécédents de b : on part de b sur l'axe des ordonnées, on rejoint la courbe, on lit les abscisses.



Exemple

Sur la figure, $f(4) = 3$; les antécédents de 3 sont 0 et 4 ; l'équation $f(x) = -1$ a pour solution $x = 2$.

Méthode - Tableau de valeurs

À la calculatrice (menu « table ») ou avec un tableur, on obtient les images de plusieurs valeurs régulièrement espacées.

II Taux de variation

Définition

Le **taux de variation** de f entre a et b ($a \neq b$) est $\boxed{\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}}$.

Il représente la variation moyenne de y lorsque x augmente de 1. C'est le coefficient directeur de la droite qui passe par les points $A(a;f(a))$ et $B(b;f(b))$.

Exemple

Pour $C(x)=0,5x^2+10x+200$: entre 10 et 20, $\dfrac{C(20)-C(10)}{20-10}=\dfrac{600-350}{10}=25$.
Entre 10 et 20 objets, chaque objet supplémentaire coûte en moyenne 25 €.

III Sens de variation

Définition

- f est **croissante** sur un intervalle I si, pour tous $a<b$ de I, $f(a)\leqslant f(b)$.
- f est **décroissante** sur I si, pour tous $a<b$ de I, $f(a)\geqslant f(b)$.
- f est **monotone** sur I si elle est croissante sur I ou décroissante sur I.

Propriété - Lien avec le taux de variation

f est croissante sur I si et seulement si tous ses taux de variation entre deux valeurs de I sont positifs ; décroissante si et seulement s'ils sont tous négatifs.

Méthode - Tableau de variations

On résume les variations dans un tableau. Pour la fonction de la figure, sur $[-0,5;4,5]$:
f est décroissante sur $[-0,5;2]$ et croissante sur $[2;4,5]$. Elle admet un **minimum** égal à -1, atteint en $x=2$.

x	$-0,5$		2		$4,5$
$f(x)$	$5,25$	↘	-1	↗	$5,25$