Primitives

Prélude - Historique et contexte

Connaître la vitesse d'un mobile à chaque instant permet-il de retrouver sa position ? C'est le problème « inverse » de la dérivation, étudié par Newton et Leibniz au XVII^{e} siècle. En 1768, Leonhard Euler propose une méthode simple pour construire pas à pas une solution approchée : elle est encore à la base des simulations numériques utilisées en ingénierie (calcul de trajectoires, de températures, de charges électriques).

I Primitives d'une fonction

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On appelle **primitive** de f sur I toute fonction F dérivable sur I telle que $\boxed{F' = f}$.

Exemple : $F(x) = x^3 + 5$ est une primitive de $f(x) = 3x^2$ sur $\mathbb{R}$ car $F'(x) = 3x^2$.

Propriété (admise)

Si F est une primitive de f sur I, alors les primitives de f sur I sont les fonctions $x \mapsto F(x) + k$, où k est un réel quelconque.
Deux primitives d'une même fonction diffèrent donc d'une **constante**.

Propriété - Primitive vérifiant une condition

Pour tous réels $x_0 \in I$ et y_0, il existe une **unique** primitive F de f sur I telle que $F(x_0) = y_0$.

II Calcul de primitives

Propriété - Primitives usuelles

Fonction f	Une primitive F
$f(x) = a$ (a réel)	$F(x) = ax$
$f(x) = x$	$F(x) = \dfrac{x^2}{2}$
$f(x) = x^2$	$F(x) = \dfrac{x^3}{3}$
$f(x) = x^n$ (n entier naturel)	$F(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$
$f(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$ $(\omega \neq 0)$	$F(t) = \dfrac{A}{\omega}\sin(\omega t + \varphi)$
$f(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$ $(\omega \neq 0)$	$F(t) = -\dfrac{A}{\omega}\cos(\omega t + \varphi)$

Propriété - Opérations

Si F et G sont des primitives de f et g, et k un réel, alors $F+G$ est une primitive de $f+g$ et kF une primitive de kf.
On obtient ainsi les primitives d'un **polynôme** terme à terme.

Exemples

- $f(x) = 6x^2 - 4x + 5$: $F(x) = 6 \times \dfrac{x^3}{3} - 4 \times \dfrac{x^2}{2} + 5x = 2x^3 - 2x^2 + 5x$.
- $g(t) = 3\cos(2t)$: $G(t) = \dfrac{3}{2}\sin(2t)$. Vérification : $G'(t) = \dfrac{3}{2} \times 2\cos(2t) = 3\cos(2t)$.
- Primitive de $f(x) = 4x - 1$ telle que $F(1) = 3$: $F(x) = 2x^2 - x + k$ et $F(1) = 1 + k = 3$, donc $k = 2$ et $F(x) = 2x^2 - x + 2$.

III Méthode d'Euler

Principe

On cherche une fonction y telle que $y'(t) = f(t)$ et $y(t_0) = y_0$ (problème de Cauchy). Si l'on ne sait pas calculer une primitive, on construit une approximation de sa courbe point par point.
On choisit un **pas** h petit. D'après l'approximation affine, $y(t+h) \approx y(t) + h \times y'(t) = y(t) + h\,f(t)$.
On construit donc :

$$t_{n+1} = t_n + h \qquad \text{et} \qquad \boxed{y_{n+1} = y_n + h \times f(t_n)}$$

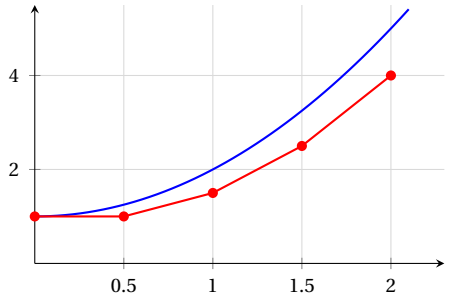
Les points $(t_n\,;\,y_n)$, reliés par des segments, approchent la courbe de la solution.

Exemple

$y' = 2t$ et $y(0) = 1$, avec un pas $h = 0{,}5$.

t_n	0	0,5	1	1,5	2
y_n	1	1	1,5	2,5	4

La solution exacte est $y(t) = t^2 + 1$; en $t = 2$ elle vaut 5. L'approximation est d'autant meilleure que le pas est petit.



Méthode - Avec Python

```
def euler(f, t0, y0, h, n):
    t, y = t0, y0
    for k in range(n):
        y = y + h * f(t)
        t = t + h
    return y
```