Produit scalaire

Prélude - Historique et contexte

Le produit scalaire apparaît au XIX^{e} siècle avec les travaux de Hamilton (quaternions, 1843) puis de Grassmann et de Gibbs, qui fixe la notation moderne vers 1880. En physique, le travail d'une force $\vec{F}$ lors d'un déplacement $\vec{AB}$ vaut $W = \vec{F} \cdot \vec{AB}$: seule la composante de la force dans la direction du déplacement « travaille ».

I Définitions et expressions

Définition - Norme

Dans un repère orthonormé, si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, la **norme** de $\vec{u}$ est $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Si $\vec{u} = \vec{AB}$, $\|\vec{u}\| = AB$.

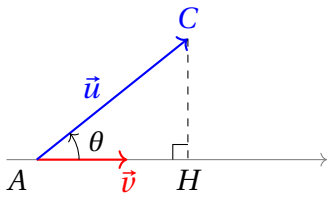
Définition - Avec le cosinus

Pour deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$, si θ est une mesure de l'angle entre eux : $\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\theta}$.

Si l'un des vecteurs est nul, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Définition - Projection orthogonale sur un axe

Soit un axe dirigé par un vecteur non nul $\vec{v}$ et $\vec{u} = \vec{AC}$ avec A sur l'axe. Si H est le projeté orthogonal de C sur l'axe, le vecteur $\vec{AH}$ est le **projeté orthogonal** de $\vec{u}$ sur l'axe.



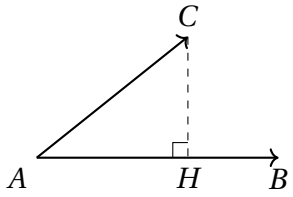
Si θ est l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$, la mesure algébrique de ce projeté est $\boxed{\|\vec{u}\|\cos\theta}$: elle est positive si $\theta < \frac{\pi}{2}$, négative si $\theta > \frac{\pi}{2}$.

Ainsi $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{v}\| \times (\|\vec{u}\|\cos\theta)$: c'est la norme de $\vec{v}$ multipliée par la mesure algébrique du projeté de $\vec{u}$ sur l'axe dirigé par $\vec{v}$ (et inversement).

Propriété - Projection orthogonale

Si H est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB) :

- $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AH$ si $\vec{AB}$ et $\vec{AH}$ ont le même sens ;
- $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = -AB \times AH$ sinon.



Propriété - Expression analytique

Dans un repère orthonormé, si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$: $\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'}$.

Propriété - Avec les normes

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \dfrac{1}{2}\left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$.

Exemple

$\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$: $\vec{u}\cdot\vec{v} = 6-4 = 2$. $\|\vec{u}\| = \sqrt{10}$, $\|\vec{v}\| = \sqrt{20}$, donc $\cos(\vec{u},\vec{v}) = \dfrac{2}{\sqrt{200}} \approx 0,141$ et l'angle mesure environ $81,9°$.

II Propriétés

Propriété - Règles de calcul

Pour tous vecteurs $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ et tout réel k : $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$; $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$; $(k\vec{u})\cdot\vec{v} = k(\vec{u}\cdot\vec{v})$; $\vec{u}\cdot\vec{u} = \|\vec{u}\|^2$.
Identités : $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$ et $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$.

Propriété - Orthogonalité

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux** si et seulement si $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$.

Propriété - Formule d'Al-Kashi

Dans un triangle ABC, avec $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$: $\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}}$.
Démonstration : $BC^2 = \|\vec{AC} - \vec{AB}\|^2 = AC^2 - 2\vec{AB}\cdot\vec{AC} + AB^2$.

Propriété - Égalité du parallélogramme

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$: $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 + \|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = 2\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2\right)$.
Dans un parallélogramme, la somme des carrés des diagonales est égale à la somme des carrés des quatre côtés.

Exemple

$AB = 5$, $AC = 7$, $\widehat{A} = 60°$: $BC^2 = 49 + 25 - 2\times 7\times 5\times \frac{1}{2} = 39$, donc $BC = \sqrt{39} \approx 6,24$.

III Application en physique

Exemple - Travail d'une force

Le travail d'une force constante $\vec{F}$ lors d'un déplacement rectiligne $\vec{AB}$ est $W = \vec{F}\cdot\vec{AB} = F\times AB\times\cos\theta$ (en joules si F est en newtons et AB en mètres).
Un chariot est tiré sur 20 m par une force de 150 N faisant un angle de 30° avec le sol : $W = 150\times 20\times\cos 30° \approx 2\,598$ J. Si la force est perpendiculaire au déplacement, son travail est nul.