Suites arithmétiques et géométriques

Prélude - Historique et contexte

Placer de l'argent à intérêts simples ou à intérêts composés ne donne pas du tout le même résultat sur le long terme. Les suites arithmétiques modélisent une évolution où l'on ajoute toujours la même quantité ; les suites géométriques une évolution où l'on multiplie toujours par le même nombre, c'est-à-dire une évolution à pourcentage constant.

I Suites arithmétiques

Définition - Relation de récurrence

Une suite (u_n) est **arithmétique** de **raison** r si, pour tout entier n : $\boxed{u_{n+1} = u_n + r}$. On passe d'un terme au suivant en ajoutant r.

Propriété - Terme de rang n

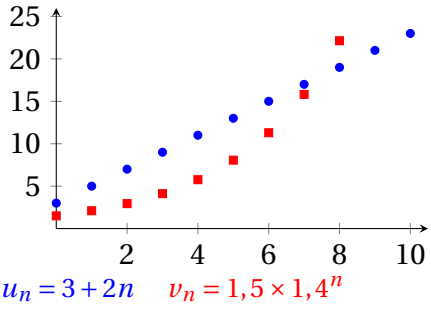
$\boxed{u_n = u_0 + n \times r}$ (et si le premier terme est u_1 : $u_n = u_1 + (n-1)r$).

Exemple

Un loyer de 600 € augmente de 15 € chaque année : $u_0 = 600$, $u_{n+1} = u_n + 15$ et $u_n = 600 + 15n$. Dans 10 ans : $u_{10} = 750$ €.

Propriété - Sens de variation et représentation

- Si $r > 0$, la suite est croissante ; si $r < 0$, elle est décroissante.
- Les points $(n ; u_n)$ sont **alignés** : on parle de croissance (ou décroissance) **linéaire**.



II Suites géométriques

Définition - Relation de récurrence

Une suite (v_n) est **géométrique** de **raison** q si, pour tout entier n : $\boxed{v_{n+1} = q \times v_n}$. On passe d'un terme au suivant en multipliant par q.

Propriété - Évolution à taux constant

Augmenter de t % revient à multiplier par $1 + \dfrac{t}{100}$; diminuer de t % revient à multiplier par $1 - \dfrac{t}{100}$.
Une grandeur qui évolue chaque période de t % est modélisée par une suite géométrique de raison $q = 1 \pm \dfrac{t}{100}$.

Propriété - Terme de rang n

$\boxed{v_n = v_0 \times q^n}$ (et si le premier terme est v_1 : $v_n = v_1 \times q^{n-1}$).

Exemple

Une voiture achetée 20 000 € perd 15 % de sa valeur chaque année : $v_0 = 20\,000$, $q = 0,85$, $v_n = 20\,000 \times 0,85^n$. Après 5 ans : $v_5 \approx 8\,874$ €.

Propriété - Sens de variation (avec $v_0 > 0$)

Si $q > 1$, la suite est croissante ; si $0 < q < 1$, elle est décroissante. Les points $(n ; v_n)$ ne sont pas alignés : on parle de croissance (ou décroissance) **exponentielle**.

III Reconnaître et calculer

Méthode - Prouver que trois nombres sont des termes consécutifs

- a, b, c sont des termes consécutifs d'une suite arithmétique si $b - a = c - b$.
- a, b, c (non nuls) sont des termes consécutifs d'une suite géométrique si $\dfrac{b}{a} = \dfrac{c}{b}$.

Exemple : 4 ; 6 ; 9 : $6 - 4 \neq 9 - 6$, mais $\frac{6}{4} = \frac{9}{6} = 1,5$: géométrique de raison 1,5.

Méthode - Avec un tableur

Pour une suite géométrique de premier terme 500 et de raison 1,03 : on saisit 500 en B2, puis la formule =B2*1,03 en B3, que l'on recopie vers le bas.