Trigonométrie

Prélude - Historique et contexte

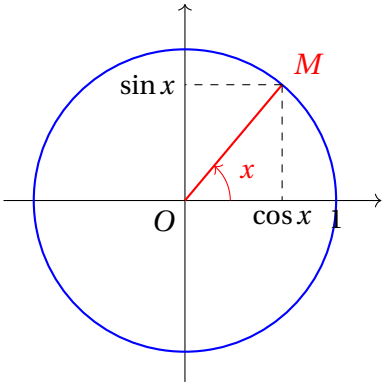
Les astronomes grecs, comme Hipparque (IIe siècle av. J.-C.) et Ptolémée, dressent des tables de cordes pour calculer la position des astres. Les mathématiciens indiens (Aryabhata, Ve siècle) introduisent le sinus, puis les savants arabes en font une véritable théorie. Le **radian**, mesure « naturelle » des angles, s'impose au XVIIIe siècle. Les fonctions cosinus et sinus décrivent tous les phénomènes **périodiques** : marées, sons, courant alternatif, mouvement d'un pendule ou d'une roue.

I Cercle trigonométrique et radian

Définition

Dans un repère orthonormé, le **cercle trigonométrique** est le cercle de centre O et de rayon 1, orienté dans le sens direct (sens inverse des aiguilles d'une montre).

En « enroulant » la droite des réels sur ce cercle, on associe à chaque réel x un unique point M du cercle. Le réel x est une mesure en **radians** de l'angle orienté $(\vec{\imath}, \overrightarrow{OM})$.



Propriété - Conversion

Un tour complet mesure 2π radians, soit 360°. Les mesures en degrés et en radians sont proportionnelles : π rad = 180°.

Degrés	0	30	45	60	90	180	360
Radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π

Définition - Mesure principale

Les réels x et $x+2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) sont associés au même point du cercle.

Un angle orienté a donc une infinité de mesures, qui diffèrent d'un multiple de 2π. Sa **mesure principale** est l'unique mesure appartenant à $]-\pi\,;\,\pi]$.

Exemple : $\dfrac{17\pi}{6} = \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi$, donc la mesure principale de $\dfrac{17\pi}{6}$ est $\dfrac{5\pi}{6}$.

II Cosinus et sinus d'un réel

Définition

Si M est le point associé au réel x, alors $\cos x$ est l'abscisse de M et $\sin x$ son ordonnée.

Propriété

Pour tout réel x : $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$, $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$ et $\boxed{\cos^2 x + \sin^2 x = 1}$.

Propriété - Valeurs remarquables

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Propriété - Angles associés

Par symétrie sur le cercle :

$\cos(-x) = \cos x$ $\sin(-x) = -\sin x$	$\cos(\pi - x) = -\cos x$ $\sin(\pi - x) = \sin x$	$\cos(\pi + x) = -\cos x$ $\sin(\pi + x) = -\sin x$
$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$ $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$ $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$	

Exemple

$\cos\dfrac{2\pi}{3} = \cos\left(\pi - \dfrac{\pi}{3}\right) = -\dfrac{1}{2}$; $\sin\dfrac{7\pi}{6} = \sin\left(\pi + \dfrac{\pi}{6}\right) = -\dfrac{1}{2}$; $\cos\dfrac{17\pi}{4} = \cos\left(\dfrac{\pi}{4} + 4\pi\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Méthode - Équations par lecture sur le cercle

Pour résoudre $\cos x = a$ (avec $-1 \leqslant a \leqslant 1$) : on trace la droite verticale d'abscisse a ; elle coupe le cercle en deux points symétriques par rapport à l'axe des abscisses (ou un seul si $a = \pm 1$).

Pour $\sin x = a$: on trace la droite horizontale d'ordonnée a ; les points sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

Exemple : sur $]-\pi\,;\,\pi]$, $\cos x = \frac{1}{2} \iff x = \frac{\pi}{3}$ ou $x = -\frac{\pi}{3}$.
Dans $\mathbb{R}$: $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

