Fonctions trigonométriques

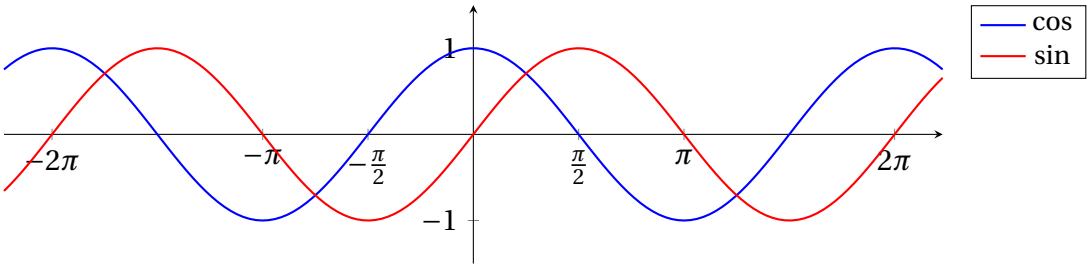
Prélude - Historique et contexte

Le courant électrique du secteur, le son d'un diapason, les vibrations d'une machine ou le mouvement d'un piston sont des phénomènes **périodiques**. Au début du XIXe siècle, Joseph Fourier montre que tout signal périodique peut s'écrire comme une somme de fonctions sinusoïdales : c'est la base du traitement du signal, de la compression MP3 ou de l'analyse des vibrations.

I Fonctions cosinus et sinus

Propriété

- Les fonctions cos et sin sont définies sur $\mathbb{R}$ et **périodiques de période** 2π : $\cos(x+2\pi) = \cos x$.
- cos est **paire** ($\cos(-x) = \cos x$) : sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- sin est **impaire** ($\sin(-x) = -\sin x$) : sa courbe est symétrique par rapport à l'origine.



Propriété - Variations sur $[0\ ;\ \pi]$

x	0		π
$\cos x$	1	↘	-1

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\sin x$	0	↗	1	↘	0

Propriété - Symétries des courbes

- Comme $\cos(-x) = \cos x$, les points $M(x\ ;\ \cos x)$ et $M'(-x\ ;\ \cos x)$ de la courbe sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.
- Comme $\sin(-x) = -\sin x$, les points $M(x\ ;\ \sin x)$ et $M'(-x\ ;\ -\sin x)$ sont symétriques par rapport à l'origine O.
- Comme $\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right) = \sin x$, la courbe de sin est l'image de celle de cos par la translation de $\frac{\pi}{2}$ vers la droite.
- Grâce à la périodicité, il suffit d'étudier les fonctions sur un intervalle de longueur 2π, ou sur $[0\ ;\ \pi]$ en utilisant la parité.

II Fonctions sinusoïdales

Définition

Soit $A > 0$, $\omega > 0$ et φ des réels. Les fonctions $t \mapsto A\cos(\omega t + \varphi)$ et $t \mapsto A\sin(\omega t + \varphi)$ sont appelées fonctions **sinusoïdales**.

- A est l'**amplitude** : la fonction prend ses valeurs entre $-A$ et A.
- ω est la **pulsation** (en rad/s si t est en secondes).
- φ est la **phase à l'origine**.

Propriété - Période et fréquence

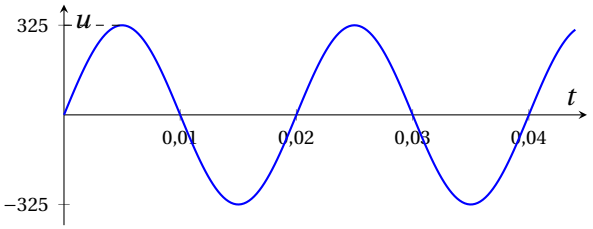
Ces fonctions sont périodiques de période $\boxed{T = \dfrac{2\pi}{\omega}}$. La **fréquence** est $f = \dfrac{1}{T} = \dfrac{\omega}{2\pi}$ (en hertz si T est en secondes).

Justification : $\cos\left(\omega\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right) + \varphi\right) = \cos(\omega t + \varphi + 2\pi) = \cos(\omega t + \varphi)$.

Exemple - Tension du secteur

La tension du secteur est $u(t) = 325\sin(100\pi t)$ (t en s, u en V).

Amplitude : 325 V ; pulsation : 100π rad/s ;
période : $T = \dfrac{2\pi}{100\pi} = 0{,}02$ s ;
fréquence : $f = 50$ Hz ; phase à l'origine : 0.



Méthode - Lire A, T et ω sur une courbe

On lit l'amplitude A (valeur maximale), puis la période T (durée entre deux maximums consécutifs) et on en déduit $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$. La phase φ se détermine avec la valeur en $t = 0$: par exemple, pour $A\cos(\omega t + \varphi)$, $A\cos\varphi = f(0)$.