Variables aléatoires

Prélude - Historique et contexte

Jacques Bernoulli (1654-1705) étudie les expériences qui n'ont que deux issues, « succès » ou « échec », comme pile ou face. En les répétant, on modélise de nombreuses situations : nombre de clients qui achètent, nombre de pièces défectueuses dans un lot, nombre de bonnes réponses à un QCM. L'espérance permet de prévoir un gain moyen, par exemple pour fixer le prix d'un jeu ou d'une assurance.

I Répétition d'épreuves de Bernoulli

Définition

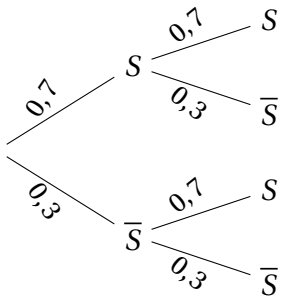
Une **épreuve de Bernoulli** est une expérience aléatoire qui n'a que deux issues : le **succès** S, de probabilité p, et l'**échec** $\overline{S}$, de probabilité $1-p$.

Propriété - Répétition d'épreuves identiques et indépendantes

Lorsqu'on répète plusieurs fois, de façon indépendante, la même épreuve de Bernoulli, on représente la situation par un arbre. La probabilité d'une liste de résultats est le produit des probabilités.

Exemple : un tireur atteint la cible avec la probabilité 0,7. Il tire 2 fois.

$P(SS) = 0,7^2 = 0,49$; $P(\text{une seule réussite}) = 0,7 \times 0,3 + 0,3 \times 0,7 = 0,42$.



II Variable aléatoire et loi de probabilité

Définition

Une **variable aléatoire** X associe un nombre à chaque issue d'une expérience aléatoire. Sa **loi de probabilité** est donnée par un tableau des valeurs x_i et des probabilités $P(X = x_i)$, dont la somme vaut 1.

Exemple

Le nombre X de cibles atteintes en 2 tirs a pour loi :

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	0,09	0,42	0,49

III Espérance

Définition

L'**espérance** de X est $\boxed{E(X) = x_1P(X = x_1) + x_2P(X = x_2) + \cdots + x_nP(X = x_n)}$.

C'est la valeur moyenne prise par X si on répète l'expérience un grand nombre de fois.

Exemple

$E(X) = 0 \times 0,09 + 1 \times 0,42 + 2 \times 0,49 = 1,4$: en moyenne, le tireur atteint $1,4$ cible pour 2 tirs.

Définition - Jeu équitable

Lorsque X est le gain d'un jeu, le jeu est **favorable** si $E(X) > 0$, **défavorable** si $E(X) < 0$ et **équitable** si $E(X) = 0$.

IV Loi de Bernoulli

Définition

Une variable aléatoire X suit la **loi de Bernoulli de paramètre** p si elle prend la valeur 1 (succès) avec la probabilité p et la valeur 0 (échec) avec la probabilité $1 - p$.

x_i	0	1
$P(X = x_i)$	$1 - p$	p

Propriété

Si X suit la loi de Bernoulli de paramètre p, alors $\boxed{E(X) = p}$.

En effet : $E(X) = 0 \times (1 - p) + 1 \times p = p$.

V Simulation et fluctuation

Méthode - Simuler des échantillons d'une loi de Bernoulli

```
from random import random
def frequence(n, p):            # frequence des 1 sur un echantillon de taille n
    c = 0
    for i in range(n):
        if random() < p:
            c = c + 1
    return c / n
L = [frequence(100, 0.3) for k in range(500)]    # 500 echantillons de taille 100
```

Propriété - Observation

Les fréquences observées fluctuent autour de p. L'écart type s de la série des fréquences est de l'ordre de $\frac{1}{\sqrt{n}}$ au plus : plus l'échantillon est grand, plus les fréquences sont proches de p. Environ 95 % des fréquences sont à une distance inférieure à $2s$ de p.