Application de la dérivation

Prélude - Historique et contexte

Au XVII^{e} siècle, Fermat cherche les maximums et minimums d'une grandeur en remarquant qu'au sommet d'une courbe la tangente est horizontale. Newton et Leibniz généralisent l'idée avec la fonction dérivée. En entreprise, on l'utilise pour trouver la production qui rend le bénéfice maximal ou le coût moyen minimal.

I Fonction dérivée

Définition

Si f admet un nombre dérivé $f'(x)$ en tout x d'un intervalle I, la fonction $x \mapsto f'(x)$ est appelée **fonction dérivée** de f et notée f'.

Propriété - Dérivées usuelles

$f(x)$	k (constante)	x	x^2	x^3
$f'(x)$	0	1	$2x$	$3x^2$

Propriété - Opérations

- La dérivée d'une somme est la somme des dérivées : $(u+v)' = u' + v'$.
- Pour tout réel k : $(ku)' = k\,u'$.

Exemple

$f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 7$: $f'(x) = 2 \times 3x^2 - 5 \times 2x + 4 = 6x^2 - 10x + 4$.

II Sens de variation et signe de la dérivée

Propriété (admise)

Sur un intervalle I :

- si $f'(x) \geqslant 0$ pour tout x de I, alors f est croissante sur I ;
- si $f'(x) \leqslant 0$ pour tout x de I, alors f est décroissante sur I.

Méthode - Étudier les variations

1. Calculer $f'(x)$.
2. Étudier le signe de $f'(x)$ (fonction affine ou polynôme de degré 2 sous forme factorisée).
3. Dresser le tableau de variations en calculant les images aux bornes et aux valeurs où f' s'annule.

Exemple

$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ sur $[-1;4]$. $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$: racines 0 et 2, positif à l'extérieur des racines.

x	-1		0		2		4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-2	↗	2	↘	-2	↗	18

III Extremums

Définition

f admet un **maximum** sur I en a si $f(x) \leqslant f(a)$ pour tout x de I ; un **minimum** si $f(x) \geqslant f(a)$.

Propriété

Si f' s'annule en a en changeant de signe, f admet un extremum local en a. On le lit dans le tableau de variations.

Exemple - Bénéfice maximal

Le bénéfice d'une entreprise pour x centaines d'objets ($0 \leqslant x \leqslant 10$) est $B(x) = -x^3 + 12x^2 - 21x - 10$ (en milliers d'euros).
$B'(x) = -3x^2 + 24x - 21 = -3(x-1)(x-7)$: positif entre 1 et 7, négatif ailleurs. B est maximal pour $x = 7$: $B(7) = -343 + 588 - 147 - 10 = 88$, soit un bénéfice de 88 000 € pour 700 objets.