# Généralités sur les fonctions

## Prélude - Historique et contexte

Le mot « fonction » est introduit par Leibniz en 1673 ; la notation $f(x)$ est due à Euler (1734). Une fonction décrit la façon dont une grandeur dépend d'une autre : le prix payé en fonction de la quantité achetée, la température en fonction de l'heure, le chiffre d'affaires en fonction du prix de vente.

## I Différents modes de représentation

### Définition

Une **fonction** $f$ définie sur un ensemble $D$ associe à chaque nombre $x$ de $D$ un unique nombre noté $f(x)$, appelé **image** de $x$. On note $f : x \mapsto f(x)$ ou $y = f(x)$.
Si $f(x) = y$, on dit que $x$ est **un antécédent** de $y$.

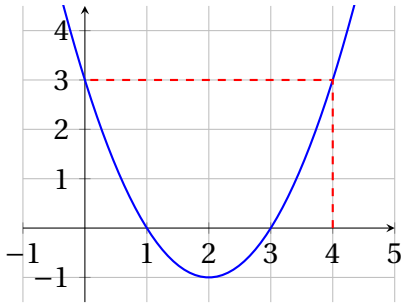
### Exemple - Expression littérale

Le coût de fabrication de $x$ objets est $C(x) = 0,5x^2 + 10x + 200$ (en euros).
Image de 10 : $C(10) = 50 + 100 + 200 = 350$ : fabriquer 10 objets coûte 350 €.

### Définition - Courbe représentative

Dans un repère, la **courbe représentative** $\mathscr{C}_f$ de $f$ est l'ensemble des points de coordonnées $(x; f(x))$.

- Lire l'image de $a$ : on part de $a$ sur l'axe des abscisses, on rejoint la courbe, on lit l'ordonnée.
- Lire les antécédents de $b$ : on part de $b$ sur l'axe des ordonnées, on rejoint la courbe, on lit les abscisses.




### Exemple

Sur la figure, $f(4) = 3$ ; les antécédents de 3 sont 0 et 4 ; l'équation $f(x) = -1$ a pour solution $x = 2$.

### Méthode - Tableau de valeurs

À la calculatrice (menu « table ») ou avec un tableur, on obtient les images de plusieurs valeurs régulièrement espacées.

## II Taux de variation

### Définition

Le **taux de variation** de $f$ entre $a$ et $b$ $(a \neq b)$ est $\boxed{\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}}$.

Il représente la variation moyenne de $y$ lorsque $x$ augmente de 1. C'est le coefficient directeur de la droite qui passe par les points $A(a; f(a))$ et $B(b; f(b))$.

### Exemple

Pour $C(x) = 0,5x^2 + 10x + 200$ : entre 10 et 20, $\dfrac{C(20) - C(10)}{20 - 10} = \dfrac{600 - 350}{10} = 25$.
Entre 10 et 20 objets, chaque objet supplémentaire coûte en moyenne 25 €.

## III Sens de variation

### Définition

- $f$ est **croissante** sur un intervalle $I$ si, pour tous $a < b$ de $I$, $f(a) \leqslant f(b)$.
- $f$ est **décroissante** sur $I$ si, pour tous $a < b$ de $I$, $f(a) \geqslant f(b)$.
- $f$ est **monotone** sur $I$ si elle est croissante sur $I$ ou décroissante sur $I$.

### Propriété - Lien avec le taux de variation

$f$ est croissante sur $I$ si et seulement si tous ses taux de variation entre deux valeurs de $I$ sont positifs ; décroissante si et seulement s'ils sont tous négatifs.

### Méthode - Tableau de variations

On résume les variations dans un tableau. Pour la fonction de la figure, sur $[-0,5;4,5]$ :
$f$ est décroissante sur $[-0,5;2]$ et croissante sur $[2;4,5]$. Elle admet un **minimum** égal à $-1$, atteint en $x = 2$.

| $x$ | $-0,5$ | | $2$ | | $4,5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $5,25$ | ↘ | $-1$ | ↗ | $5,25$ |