Fonctions polynômes de degré 2

Prélude - Historique et contexte

Les Babyloniens savaient déjà résoudre, vers 1800 avant notre ère, des problèmes conduisant à des équations du second degré. La courbe d'une fonction polynôme de degré 2 est une **parabole** : c'est la trajectoire d'un ballon lancé, la forme d'une antenne satellite ou d'un pont suspendu. En économie, de nombreux bénéfices sont modélisés par de telles fonctions.

I Fonctions polynômes de degré 2

Définition

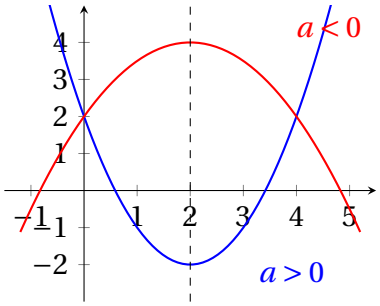
Une **fonction polynôme de degré 2** est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$, où a, b, c sont des réels avec $a \neq 0$.

Propriété - Allure de la courbe

La courbe de f est une **parabole**.

- Si $a > 0$, elle est « tournée vers le haut » : f admet un minimum.
- Si $a < 0$, elle est « tournée vers le bas » : f admet un maximum.

Le point le plus bas (ou le plus haut) est le **sommet** S. La parabole est symétrique par rapport à la droite verticale passant par S, appelée **axe de symétrie**.



Propriété - Abscisse du sommet

Si x_1 et x_2 sont deux nombres qui ont la même image, l'axe de symétrie passe par leur milieu : l'abscisse du sommet est $\dfrac{x_1 + x_2}{2}$.

On admet aussi que l'abscisse du sommet est $\boxed{\alpha = -\dfrac{b}{2a}}$ et que son ordonnée est $f(\alpha)$.

Propriété - Tableau de variations

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$ $(a > 0)$		↘	$f(\alpha)$	↗	

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$ $(a < 0)$		↗	$f(\alpha)$	↘	

Exemple

$f(x) = -2x^2 + 8x - 3$: $a = -2 < 0$, $\alpha = -\dfrac{8}{-4} = 2$ et $f(2) = -8 + 16 - 3 = 5$. La fonction admet un maximum égal à 5 atteint en $x = 2$.

II Forme factorisée, racines et signe

Définition

Une **racine** de f est un nombre x tel que $f(x) = 0$: c'est l'abscisse d'un point d'intersection de la parabole avec l'axe des abscisses.

Propriété - Forme factorisée

Si $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$, alors les racines de f sont x_1 et x_2, et l'abscisse du sommet est $\alpha = \dfrac{x_1+x_2}{2}$.

Propriété - Signe

Un polynôme $a(x-x_1)(x-x_2)$ avec $x_1 < x_2$ est **du signe de a à l'extérieur des racines** et du signe contraire entre les racines.

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$a(x-x_1)(x-x_2)$	signe de a		0	signe de $-a$	0	signe de a	

Exemple

$g(x) = 2(x+1)(x-3)$: racines -1 et 3, $\alpha = 1$, $g(1) = 2\times 2\times(-2) = -8$. Comme $a = 2 > 0$, $g(x) < 0$ pour $x \in]-1;3[$ et $g(x) > 0$ pour $x < -1$ ou $x > 3$.

Méthode - Développer pour obtenir la forme développée

$2(x+1)(x-3) = 2(x^2-3x+x-3) = 2x^2-4x-6$.