Probabilités conditionnelles

Prélude - Historique et contexte

Les probabilités conditionnelles permettent de mettre à jour une probabilité lorsqu'on dispose d'une information. Thomas Bayes (1763) puis Laplace en ont posé les bases. Elles sont utilisées tous les jours : fiabilité d'un test médical, filtrage des courriels indésirables, études de marché.

I Tableaux croisés et fréquences conditionnelles

Exemple

On interroge 500 clients d'un magasin sur leur mode de paiement.

	Carte (C)	Espèces ($\overline{C}$)	Total
Moins de 30 ans (J)	180	20	200
30 ans et plus ($\overline{J}$)	210	90	300
Total	390	110	500

- Fréquence marginale des clients qui paient par carte : $\frac{390}{500} = 0,78$.
- Fréquence conditionnelle des paiements par carte parmi les moins de 30 ans : $\frac{180}{200} = 0,9$.

II Probabilités conditionnelles

Définition

Soit A un événement de probabilité non nulle. La **probabilité de B sachant A** est $\boxed{P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}}$.

Exemple

On choisit un client au hasard dans le tableau précédent. $P(J) = 0,4$, $P(J \cap C) = \frac{180}{500} = 0,36$, donc $P_J(C) = \frac{0,36}{0,4} = 0,9$: on retrouve la fréquence conditionnelle.

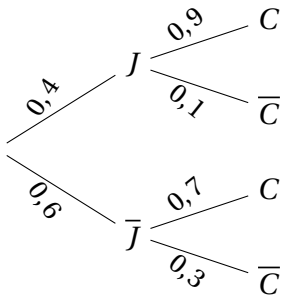
Propriété

$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$ et $P_A(B) + P_A(\overline{B}) = 1$.

III Arbres pondérés

Propriété - Règles de l'arbre

- La somme des probabilités des branches issues d'un même nœud vaut 1.
- La probabilité d'un chemin est le produit des probabilités de ses branches.
- La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des chemins qui y mènent.



Propriété - Formule des probabilités totales

Si A et $\overline{A}$ partagent l'univers : $\boxed{P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)}$.

Exemple

$P(C) = 0,4 \times 0,9 + 0,6 \times 0,7 = 0,36 + 0,42 = 0,78$.

$P_C(J) = \dfrac{P(J \cap C)}{P(C)} = \dfrac{0,36}{0,78} \approx 0,46$.

IV Indépendance

Définition

Deux événements A et B sont **indépendants** lorsque $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$, c'est-à-dire, si $P(A) \neq 0$, lorsque $P_A(B) = P(B)$: savoir que A est réalisé ne change pas la probabilité de B.

Exemple

Ici $P_J(C) = 0,9 \neq P(C) = 0,78$: l'âge et le mode de paiement ne sont pas indépendants.