Notion de suites

Prélude - Historique et contexte

En 1202, Léonard de Pise, dit Fibonacci, pose dans son *Liber abaci* un problème de lapins dont la solution est la suite $1,1,2,3,5,8,13,\ldots$ où chaque terme est la somme des deux précédents. Bien avant lui, Archimède encadrait π à l'aide de suites de polygones. Les suites modélisent des phénomènes **discrets** (qui évoluent étape par étape) : épargne mois après mois, population d'une année à l'autre, nombre d'opérations d'un algorithme.

I Définition et modes de génération

Définition

Une **suite numérique** (u_n) associe à chaque entier naturel n un réel noté u_n : c'est le **terme de rang** n (ou terme d'indice n).

Définition - Suite définie de façon explicite

u_n est donné directement en fonction de n : $u_n = f(n)$.
Exemple : $u_n = n^2 - 1$ donne $u_0 = -1$, $u_1 = 0$, $u_{10} = 99$. On peut calculer directement n'importe quel terme.

Définition - Suite définie par récurrence

On donne le premier terme et une relation permettant de calculer un terme à partir du précédent : $u_0 = a$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.
Exemple : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 3u_n - 1$: $u_1 = 5$, $u_2 = 14$, $u_3 = 41$. Pour obtenir u_{10}, il faut calculer tous les termes précédents.

Méthode - Calculer un terme avec Python

```
def terme(n):
    u = 2
    for i in range(n):
        u = 3*u - 1
    return u
```

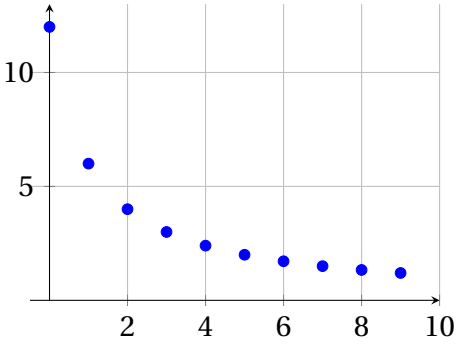
`terme(10)` renvoie $u_{10} = 88\,574$.
La boucle est exécutée n fois : à chaque passage on remplace u par le terme suivant.
⚠ Ne pas confondre u_{n+1} (terme suivant) et $u_n + 1$ (terme augmenté de 1).

II Représentation graphique

Définition

Dans un repère, la représentation graphique de (u_n) est l'ensemble des points de coordonnées $(n\ ;\ u_n)$. Ce sont des points isolés : on ne les relie pas.

Ci-contre : $u_n = \dfrac{12}{n+1}$.



III Sens de variation

Définition

- (u_n) est **croissante** si pour tout n, $u_{n+1} \geqslant u_n$;
- (u_n) est **décroissante** si pour tout n, $u_{n+1} \leqslant u_n$;
- (u_n) est **constante** si pour tout n, $u_{n+1} = u_n$.

Méthode - Étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$

$u_n = n^2 + n$: $u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 + (n+1) - n^2 - n = 2n + 2 > 0$, donc (u_n) est croissante.
$u_{n+1} = u_n - n^2 - 1$: $u_{n+1} - u_n = -n^2 - 1 < 0$, donc (u_n) est décroissante.

Propriété - Cas d'une suite explicite

Si $u_n = f(n)$ et si f est croissante (resp. décroissante) sur $[0\ ;\ +\infty[$, alors (u_n) est croissante (resp. décroissante).