

Équations de droites

Prélude - Historique et contexte

Dans sa *Géométrie* (1637), René Descartes montre qu'une courbe peut être décrite par une équation reliant l'abscisse et l'ordonnée de ses points. La droite est la plus simple de ces courbes : son équation est du premier degré. Ce lien entre algèbre et géométrie est utilisé partout, des logiciels de dessin aux GPS, en passant par la modélisation de coûts (comparer le coût d'une voiture essence, diesel ou électrique en fonction des kilomètres parcourus, par exemple).

I Vecteur directeur et équation cartésienne

Définition

Un **vecteur directeur** d'une droite d est un vecteur non nul $\vec{u}$ dont la direction est celle de d . Si A et B sont deux points distincts de d , $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de d .

Propriété

Le point $M(x; y)$ appartient à la droite d passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires, c'est-à-dire $\det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) = 0$.

Toute droite admet une **équation cartésienne** de la forme :

$$\boxed{ax + by + c = 0} \quad \text{avec } (a; b) \neq (0; 0).$$

Le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est alors un vecteur directeur de la droite.

Exemple

Déterminer une équation cartésienne de la droite passant par $A(1; 2)$ et de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$$M(x; y) \in d \iff \det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) = 0 \iff (x-1) \times (-1) - 3 \times (y-2) = 0 \iff -x+1-3y+6=0 \iff -x-3y+7=0.$$

II Équation réduite et pente

Propriété

- Une droite **parallèle à l'axe des ordonnées** a une équation de la forme $\boxed{x = k}$.
- Toute autre droite a une unique **équation réduite** de la forme $\boxed{y = mx + p}$ où m est la **pente** (ou coefficient directeur) et p l'**ordonnée à l'origine**.

Si $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ sont deux points de la droite avec $x_A \neq x_B$: $\boxed{m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}}$.

Le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite d'équation $y = mx + p$.

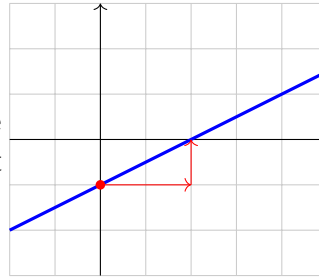
Exemple

Équation réduite de la droite (AB) avec $A(-1 ; 5)$ et $B(3 ; -3)$:

$m = \frac{-3-5}{3-(-1)} = \frac{-8}{4} = -2$. Donc $y = -2x + p$. Comme A est sur la droite : $5 = -2 \times (-1) + p$ donc $p = 3$.
 $(AB) : y = -2x + 3$.

Méthode - Tracer une droite

Pour tracer $d : y = \frac{1}{2}x - 1$: on part du point $(0 ; -1)$ (ordonnée à l'origine), puis on avance de 1 en abscisse et on monte de $\frac{1}{2}$ en ordonnée (ou on avance de 2 et on monte de 1).



III Positions relatives de deux droites

Propriété

- Deux droites sont **parallèles** si et seulement si leurs vecteurs directeurs sont colinéaires.
- Deux droites d'équations réduites $y = mx + p$ et $y = m'x + p'$ sont parallèles si et seulement si $m = m'$.
- Sinon, elles sont **sécantes** : on trouve leur point d'intersection en résolvant le système formé par leurs deux équations.

Exemple

$d_1 : y = 2x - 1$ et $d_2 : y = -x + 5$ ont des pentes différentes : elles sont sécantes.

$2x - 1 = -x + 5 \iff 3x = 6 \iff x = 2$ puis $y = 2 \times 2 - 1 = 3$. Le point d'intersection est $(2 ; 3)$.

Exemple - Modélisation

Une voiture essence coûte 28 500 € à l'achat puis environ 0,13 € par km de carburant; une voiture électrique coûte 36 500 € puis environ 0,04 € par km d'électricité.

Les coûts sont modélisés par $E(x) = 0,13x + 28500$ et $V(x) = 0,04x + 36500$ où x est le nombre de km.

Les deux droites se coupent quand $0,13x + 28500 = 0,04x + 36500$, soit $0,09x = 8000$, soit $x \approx 88889$ km. Au-delà, la voiture électrique est plus économique (hors entretien et assurance).