

Ensembles de nombres et intervalles

Prélude - Historique et contexte

Les nombres entiers servent à compter depuis la préhistoire. Les fractions apparaissent chez les Égyptiens et les Babyloniens pour partager. Vers le V^e siècle avant notre ère, les pythagoriciens découvrent avec effroi que la diagonale d'un carré de côté 1 ne peut pas s'écrire comme une fraction : c'est la « crise des irrationnels ». Il faudra attendre le XIX^e siècle pour que les mathématiciens (Dedekind, Cantor) construisent rigoureusement l'ensemble des nombres réels.

Attention : la calculatrice ne manipule que des nombres décimaux. Quand elle affiche $\sqrt{2} \approx 1,414213562$, ce n'est qu'une valeur approchée !

I Les ensembles de nombres

Définitions

- $\mathbb{N}$ est l'ensemble des **entiers naturels** : $0; 1; 2; 3; \dots$
- $\mathbb{Z}$ est l'ensemble des **entiers relatifs** : $\dots; -2; -1; 0; 1; 2; \dots$
- $\mathbb{D}$ est l'ensemble des **nombres décimaux** : ceux qui s'écrivent $\frac{a}{10^n}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$.

Exemples : $3,14; -0,5; \frac{3}{4} = 0,75$.

- $\mathbb{Q}$ est l'ensemble des **nombres rationnels** : ceux qui s'écrivent $\frac{a}{b}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$.

Exemples : $\frac{1}{3}; -\frac{22}{7}; 5$.

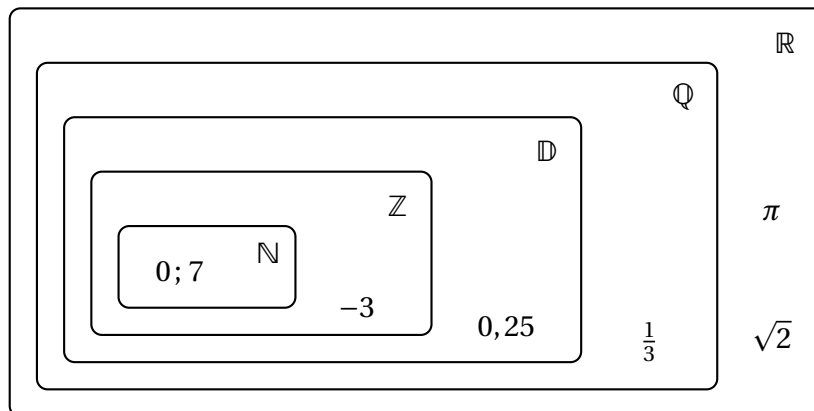
- $\mathbb{R}$ est l'ensemble des **nombres réels** : ce sont les abscisses de tous les points d'une droite graduée (la **droite numérique**).

Un réel qui n'est pas rationnel est dit **irrationnel**. Exemples : $\sqrt{2}; \pi; \sqrt{3}$.

Propriété

Les ensembles sont emboîtés : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

Le symbole $\in$ signifie « appartient à » (pour un nombre) et $\subset$ signifie « est inclus dans » (pour un ensemble).



Exemple

Compléter avec $\in$ ou $\notin$: $-4 \dots \mathbb{N}$ $\frac{12}{3} \dots \mathbb{N}$ $\frac{1}{3} \dots \mathbb{D}$ $\sqrt{9} \dots \mathbb{Z}$ $\pi \dots \mathbb{Q}$

Réponses : $\notin$; $\in$ (car $\frac{12}{3} = 4$) ; $\notin$; $\in$ (car $\sqrt{9} = 3$) ; $\notin$.

Propriété (démonstration exigible)

$\sqrt{2}$ est irrationnel.

Idée de la preuve : on suppose que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ avec une fraction irréductible. Alors $p^2 = 2q^2$ donc p^2 est pair, donc p est pair : $p = 2k$. On obtient $4k^2 = 2q^2$ soit $q^2 = 2k^2$, donc q est pair aussi. La fraction n'était donc pas irréductible : c'est absurde.

II Intervalles de $\mathbb{R}$

Définition

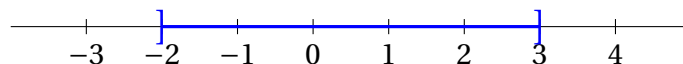
Soient a et b deux réels avec $a < b$.

Inégalité	Intervalle	Représentation
$a \leq x \leq b$	$[a ; b]$	crochets tournés vers l'intérieur : a et b inclus
$a < x < b$	$]a ; b[$	crochets tournés vers l'extérieur : a et b exclus
$a \leq x < b$	$[a ; b[$	a inclus, b exclu
$x \geq a$	$[a ; +\infty[$	jusqu'à l'infini
$x < b$	$] -\infty ; b[$	depuis moins l'infini

Du côté de $+\infty$ ou $-\infty$, le crochet est toujours ouvert. $\mathbb{R} =] -\infty ; +\infty[$.

Exemple

L'ensemble des réels x tels que $-2 < x \leq 3$ est l'intervalle $] -2 ; 3]$:



Définition

- L'**intersection** $I \cap J$ est l'ensemble des réels qui appartiennent à I **et** à J .
- La **réunion** $I \cup J$ est l'ensemble des réels qui appartiennent à I **ou** à J (ou aux deux).

Exemple

$[-1 ; 4] \cap [2 ; 7[= [2 ; 4]$ et $[-1 ; 4] \cup [2 ; 7[= [-1 ; 7[$.

III Valeur absolue et distance

Définition

La **valeur absolue** d'un réel a , notée $|a|$, est la distance entre a et 0 sur la droite numérique :

$$|a| = a \text{ si } a \geq 0 \qquad |a| = -a \text{ si } a < 0$$

La **distance** entre deux réels a et b est $|a - b| = |b - a|$.

Exemple

$|7| = 7$; $|-7| = 7$; la distance entre -3 et 5 est $|5 - (-3)| = 8$.

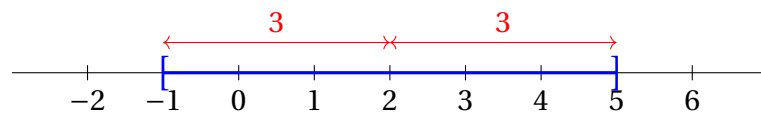
Propriété

Soit a un réel et $r > 0$. $|x - a| \leq r \iff x \in [a - r; a + r]$

Autrement dit, les réels à une distance inférieure ou égale à r de a forment l'intervalle centré en a de rayon r .

Exemple

$|x - 2| \leq 3 \iff x \in [-1; 5]$.



IV Encadrement décimal

Définition

Encadrer un réel x à 10^{-n} près, c'est trouver deux décimaux a et b tels que $a \leq x \leq b$ avec $b - a = 10^{-n}$ (l'**amplitude** de l'encadrement).

Exemple

$1,41 \leq \sqrt{2} \leq 1,42$ est un encadrement de $\sqrt{2}$ à 10^{-2} près. $3,141 \leq \pi \leq 3,142$ est un encadrement de π à 10^{-3} près.

Remarque - Algorithme de balayage

Pour encadrer $\sqrt{2}$, on teste $1^2, 1,1^2, 1,2^2, \dots$ jusqu'à dépasser 2 : $1,4^2 = 1,96 < 2 < 1,5^2 = 2,25$. On recommence ensuite avec un pas de 0,01 entre 1,4 et 1,5, et ainsi de suite.

```
def balayage(n):  
    x = 1  
    pas = 10**(-n)  
    while (x + pas)**2 <= 2:  
        x = x + pas  
    return x, x + pas
```