

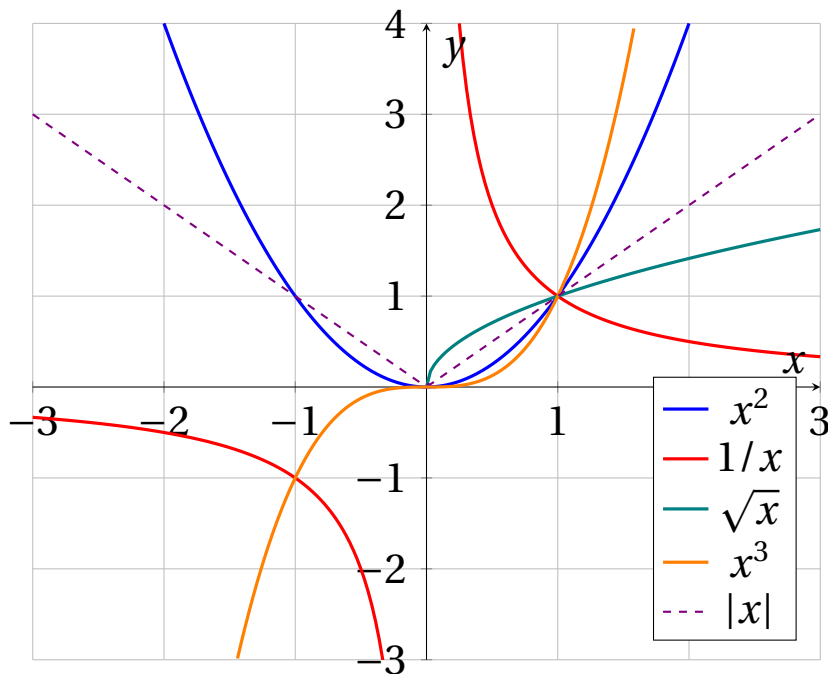
Fonctions de référence

Prélude - Historique et contexte

Les Babyloniens utilisaient déjà, vers 1800 avant notre ère, des tables de carrés, d'inverses et de racines. Ces « fonctions de référence » sont les briques de base avec lesquelles on construit la plupart des modèles : l'aire d'un disque varie comme le carré du rayon, le temps de trajet comme l'inverse de la vitesse, le volume d'un cube comme le cube de son côté. Connaître leurs courbes permet de résoudre rapidement de nombreuses équations et inéquations.

I Les fonctions de référence

Fonction	Définie sur	Variations	Particularité
carré $x \mapsto x^2$	$\mathbb{R}$	décroissante sur $] -\infty ; 0]$, croissante sur $[0 ; +\infty[$	paire, parabole
inverse $x \mapsto \frac{1}{x}$	$] -\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$	décroissante sur $] -\infty ; 0[$ et sur $]0 ; +\infty[$	impaire, hyperbole
racine $x \mapsto \sqrt{x}$	$[0 ; +\infty[$	croissante	
cube $x \mapsto x^3$	$\mathbb{R}$	croissante	impaire
valeur absolue $x \mapsto x $	$\mathbb{R}$	décroissante sur $] -\infty ; 0]$, croissante sur $[0 ; +\infty[$	paire



Propriété - Positions relatives pour $x \geq 0$

- Si $0 \leq x \leq 1$: $x^3 \leq x^2 \leq x \leq \sqrt{x}$.
- Si $x \geq 1$: $\sqrt{x} \leq x \leq x^2 \leq x^3$.

Les courbes de la fonction carré (sur $[0 ; +\infty[$) et de la fonction racine carrée sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

II Comparer des images

Méthode

On utilise les variations : une fonction croissante conserve l'ordre, une fonction décroissante l'inverse.

Exemple

- $-3,2 < -3,1 \leq 0$ et la fonction carré est décroissante sur $] -\infty ; 0]$ donc $(-3,2)^2 > (-3,1)^2$.
- $0 < \pi < 3,15$ et la fonction inverse est décroissante sur $]0 ; +\infty[$ donc $\frac{1}{\pi} > \frac{1}{3,15}$.
- La fonction cube est croissante sur $\mathbb{R}$ et $-2 < 1,5$ donc $(-2)^3 < 1,5^3$.

III Équations et inéquations

Propriété

- $x^2 = k$: deux solutions $-\sqrt{k}$ et $\sqrt{k}$ si $k > 0$; une solution 0 si $k = 0$; aucune si $k < 0$.
- $\frac{1}{x} = k$ avec $k \neq 0$: une solution $x = \frac{1}{k}$; aucune solution si $k = 0$.
- $\sqrt{x} = k$: une solution $x = k^2$ si $k \geq 0$; aucune si $k < 0$.
- $x^3 = k$: toujours une unique solution, notée $\sqrt[3]{k}$.
- $|x| = k$: deux solutions $-k$ et k si $k > 0$.

Méthode - Inéquations

On lit la solution sur la courbe : on cherche les abscisses des points de la courbe situés au-dessus (ou en dessous) de la droite horizontale $y = k$.

Exemple

- $x^2 < 9 \iff x \in]-3 ; 3[$
- $\frac{1}{x} > 2 \iff x \in \left] 0 ; \frac{1}{2} \right[$
- $\sqrt{x} \leq 3 \iff x \in [0 ; 9]$
- $x^2 \geq 4 \iff x \in]-\infty ; -2] \cup [2 ; +\infty[$
- $\frac{1}{x} \leq -1 \iff x \in [-1 ; 0[$
- $|x| \leq 2 \iff x \in [-2 ; 2]$