

Pourcentages, fréquences marginales et conditionnelles

Prélude - Historique et contexte

Le mot « pourcentage » vient de l'italien *per cento* : « pour cent ». Les marchands italiens du XV^e siècle l'utilisaient déjà pour calculer intérêts et bénéfices. Aujourd'hui les pourcentages sont partout : sondages, résultats d'élections, soldes, statistiques médicales. Savoir de quel ensemble on parle (« 20 % de quoi ? ») est essentiel pour ne pas se faire tromper par les chiffres.

I Proportion et pourcentage

Définition

On considère une population E (l'**ensemble de référence**) d'effectif n_E et une partie A de cette population, d'effectif n_A .

La **proportion** (ou fréquence) de A dans E est le nombre :

$$p = \frac{n_A}{n_E} \quad \text{avec } 0 \leq p \leq 1.$$

Une proportion peut s'écrire sous forme décimale, fractionnaire ou en pourcentage : $p = 0,35 = \frac{35}{100} = 35 \%$.

Propriété

De la formule $p = \frac{n_A}{n_E}$, on déduit :

$$n_A = p \times n_E \quad (\text{calculer une partie connaissant le tout})$$

$$n_E = \frac{n_A}{p} \quad (\text{calculer le tout connaissant une partie})$$

Exemple

1. Dans un lycée de 1 250 élèves, 42 % sont demi-pensionnaires. Combien y a-t-il de demi-pensionnaires ?

Réponse : $0,42 \times 1\,250 = 525$ élèves.

2. Dans une ville, 3 600 habitants ont moins de 18 ans, ce qui représente 24 % de la population. Combien la ville compte-t-elle d'habitants ?

Réponse : $\frac{3\,600}{0,24} = 15\,000$ habitants.

II Pourcentage de pourcentage

Propriété

Si $A \subset B \subset E$, que p_1 est la proportion de B dans E et p_2 la proportion de A dans B , alors la proportion de A dans E est :

$$p = p_1 \times p_2$$

Exemple

Dans un lycée, 55 % des élèves sont des filles et 30 % des filles font du sport en club. La proportion de filles sportives parmi tous les élèves est $0,55 \times 0,30 = 0,165$ soit 16,5 %.

Remarque

On ne peut **pas** additionner deux pourcentages qui ne portent pas sur le même ensemble de référence.

III Tableau croisé d'effectifs

Définition

Lorsqu'on étudie deux caractères sur une même population, on peut résumer les données dans un **tableau croisé d'effectifs** (ou tableau à double entrée). La dernière ligne et la dernière colonne donnent les **totaux** (ou effectifs marginaux).

Exemple

On a interrogé 200 élèves de seconde sur leur moyen de transport.

	Bus	Vélo	À pied	Total
Internes	10	5	25	40
Externes	90	30	40	160
Total	100	35	65	200

Définition

- Une **fréquence marginale** est le quotient d'un total de ligne ou de colonne par l'effectif total.
- Une **fréquence conditionnelle** est le quotient d'un effectif du tableau par le total de sa ligne ou de sa colonne. On restreint alors la population à une sous-population.

On note $f_A(B)$ la fréquence de B parmi les individus de A :

$$f_A(B) = \frac{\text{effectif de } A \cap B}{\text{effectif de } A}.$$

Exemple

Avec le tableau précédent :

- fréquence marginale des élèves qui prennent le bus : $\frac{100}{200} = 0,5$ soit 50 %;
- fréquence des internes : $\frac{40}{200} = 0,2$;
- fréquence conditionnelle des élèves qui viennent à pied **parmi les internes** : $\frac{25}{40} = 0,625$;
- fréquence conditionnelle des internes **parmi ceux qui viennent à pied** : $\frac{25}{65} \approx 0,385$.

Remarque

Attention à bien identifier la population de référence : « parmi les internes » et « parmi ceux qui viennent à pied » ne donnent pas du tout le même résultat !