

Inéquations

Prélude - Historique et contexte

Les symboles $<$ et $>$ sont introduits par l'Anglais Thomas Harriot en 1631, et $\leq$, $\geq$ par le Français Pierre Bouguer au XVIII^e siècle. Les inéquations servent à répondre à des questions du type « à partir de quand? » ou « jusqu'à combien? » : à partir de quel nombre de ventes une entreprise est-elle rentable, quelle vitesse ne pas dépasser pour s'arrêter à temps...

I Inéquations du premier degré

Définition

Résoudre une inéquation d'inconnue x , c'est trouver l'ensemble de toutes les valeurs de x qui la vérifient. Cet ensemble est souvent un intervalle.

Propriété

On ne change pas le sens d'une inégalité :

- en ajoutant ou en soustrayant un même nombre aux deux membres ;
- en multipliant ou en divisant les deux membres par un même nombre **strictement positif**.

En revanche, on **change le sens** de l'inégalité quand on multiplie ou divise les deux membres par un même nombre **strictement négatif**.

Exemple

Résoudre $5x + 3 \leq 2x - 9$.

$5x - 2x \leq -9 - 3$ donc $3x \leq -12$ donc $x \leq -4$. $\mathcal{S} =]-\infty ; -4]$.

Résoudre $-2x + 7 > 1$.

$-2x > -6$ donc $x < \frac{-6}{-2}$ (on divise par un négatif) donc $x < 3$. $\mathcal{S} =]-\infty ; 3[$.

Propriété - Signe de $ax + b$

Soit $a \neq 0$. L'expression $ax + b$ s'annule en $x = -\frac{b}{a}$ et elle est **du signe de a à droite** de cette valeur :

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax + b$	$-$	0	$+$

cas $a > 0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax + b$	$+$	0	$-$

cas $a < 0$

II Tableau de signes d'un produit ou d'un quotient

Propriété - Règle des signes

Un produit (ou un quotient) de facteurs est positif s'il contient un nombre pair de facteurs négatifs, négatif sinon.

Méthode

Pour étudier le signe de $(2x - 4)(-x + 3)$:

1. On cherche où chaque facteur s'annule : $2x - 4 = 0 \iff x = 2$; $-x + 3 = 0 \iff x = 3$.
2. On dresse un tableau avec une ligne par facteur (valeurs rangées dans l'ordre croissant), puis une ligne pour le produit.

x	$-\infty$	2	3	$+\infty$	
$2x - 4$	-	0	+	+	
$-x + 3$	+	+	0	-	
$(2x - 4)(-x + 3)$	-	0	+	0	-

On en déduit par exemple que $(2x - 4)(-x + 3) \geq 0 \iff x \in [2 ; 3]$.

Méthode - Quotient

Pour un quotient $\frac{A(x)}{B(x)}$, on procède de même mais les valeurs qui annulent le dénominateur sont **interdites** : on les signale par une **double barre**.

Exemple

Résoudre $\frac{x+1}{x-2} < 0$. Le quotient n'existe pas pour $x = 2$.

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$x + 1$	-	0	+	+
$x - 2$	-	-	0	+
$\frac{x+1}{x-2}$	+	0	-	+

$\mathcal{S} =] - 1 ; 2[$.

Remarque

Pour résoudre une inéquation comme $(x + 1)(x - 3) > (x + 1)(2x - 1)$, on ramène tout d'un seul côté pour comparer à 0, puis on **factorise** : $(x + 1)[(x - 3) - (2x - 1)] > 0$, c'est-à-dire $(x + 1)(-x - 2) > 0$.