

Construction de vecteurs

Prélude - Historique et utilité

Après des siècles de convergence entre géométrie et algèbre, les vecteurs sont nés au XIXe siècle pour représenter des grandeurs avec une direction et une intensité comme les forces et les vitesses.

Au fil des simplifications, enrichissements, élargissements à d'autres domaines, adaptations... les vecteurs sont devenus omniprésents dès qu'il faut représenter une information avec plusieurs caractéristiques :

- en physique comme on vient de le voir pour décrire forces, vitesses et déplacements ;
- en navigation GPS pour calculer trajets et directions ;
- en informatique graphique pour positionner objets et personnages dans les jeux vidéo ;
- pour les intelligences artificielles génératives, où chaque mot, phrase, image, utilisateur ou produit devient un vecteur.
- Pour les algorithmes de recommandation. Notre profil est un vecteur.
- Pour la détection de fraudes, en médecine, pour les recherches d'images, les reconnaissances faciales, en météorologie etc...

I Vecteur associé à une translation

Définition

Un **vecteur** permet de décrire un **déplacement**, plus précisément une **translation** qui transforme tout point A en un point B en le déplaçant toujours :

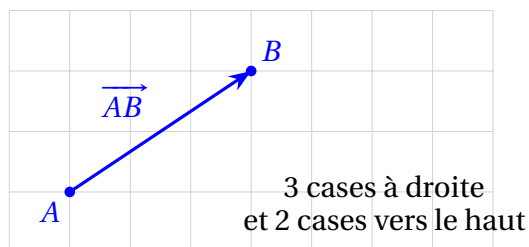
- dans la même **direction**, celle de la droite qui donne l'alignement du vecteur ;
- dans le même **sens**, donné par la pointe de la flèche ;
- de la même **longueur** ou **norme**, notée $\|\overrightarrow{AB}\| = AB$. Ici, $\|\overrightarrow{AB}\| = AB$.

Le vecteur qui décrit cette translation est noté $\overrightarrow{AB}$. On parle de translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

La première lettre est le **point de départ** et la seconde le **point d'arrivée**. On représente graphiquement un vecteur avec une flèche.

Exemple

Sur un plan de jeu, un pion se déplace de trois cases vers la droite et de deux cases vers le haut. Ce déplacement peut être représenté par un vecteur. Si le pion part de A et arrive en B , ce vecteur est $\overrightarrow{AB}$: tous les pions soumis à cette même translation effectuent exactement le même déplacement.



II Représentants et égalité

Définition

Deux vecteurs sont **égaux** s'ils ont la même direction, le même sens et la même norme. On écrit par exemple :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}.$$

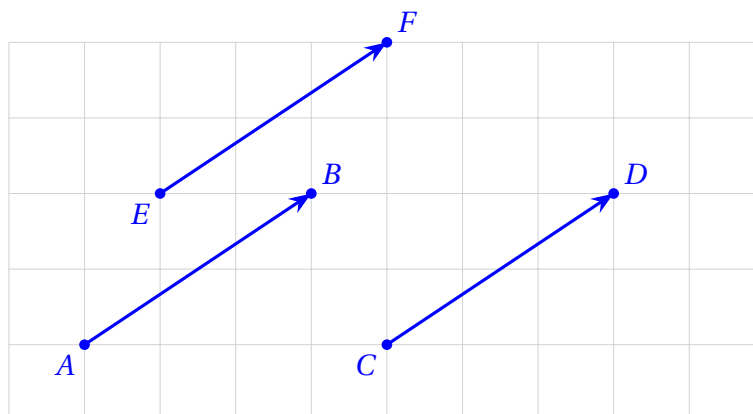
Les flèches $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ peuvent être placées à des endroits différents : elles décrivent alors le même déplacement. On dit que ce sont des **représentants d'un même vecteur**.

Pour simplifier on donne parfois directement un nom au vecteur comme $\vec{u}$, $\vec{v}$ etc...

Exemple

Dans la figure suivante, les trois flèches ont même direction, même sens et même longueur. Elles représentent donc le même vecteur :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF}.$$

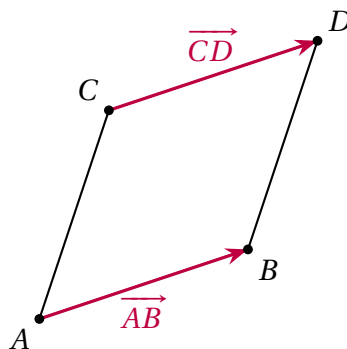


Propriété

Pour tous points A, B, C et D , les affirmations suivantes sont équivalentes :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \iff \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD} \iff ABDC \text{ est un parallélogramme (éventuellement aplati).}$$

⚠ C'est bien ABDC et pas ABCD.



Définition

Le **vecteur nul** est noté $\vec{0}$. Il correspond à l'absence de déplacement : sa norme est nulle et il n'a ni direction ni sens.

$$\overrightarrow{AA} = \vec{0}.$$

Plus généralement, $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ si et seulement si les points A et B sont confondus.

III Somme de deux vecteurs

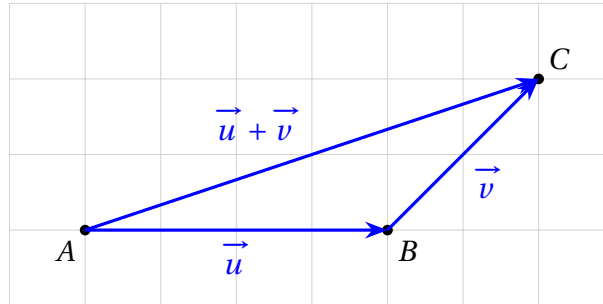
Définition

La somme de deux vecteurs consiste à enchaîner les deux déplacements. Pour construire $\vec{u} + \vec{v}$:

1. On choisit un point A et on construit B tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$.
2. À partir de B , on construit C tel que $\overrightarrow{BC} = \vec{v}$.
3. Alors $\overrightarrow{AC} = \vec{u} + \vec{v}$.

Exemple

Un robot avance vers l'est, puis part en diagonale vers le nord-est. Le vecteur somme décrit son déplacement direct entre le départ et l'arrivée.



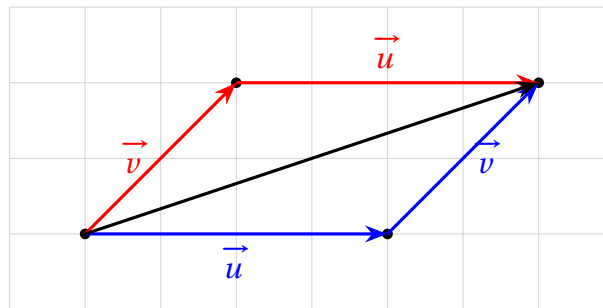
Dans cette figure :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

Remarque

L'ordre des vecteurs ne change pas la somme :

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}.$$



IV Relation de Chasles

Définition

Pour tous points A, B et C :

$$\boxed{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}}$$

Cette égalité s'appelle la **relation de Chasles**. Elle traduit l'idée simple suivante : aller de A à B , puis de B à C , revient à aller directement de A à C .

Exemple

Sur une carte, pour aller du musée M au parc P , Léa passe par la gare G . On a alors :

$$\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GP} = \overrightarrow{MP}.$$

La relation de Chasles permet aussi de transformer une expression plus longue. Par exemple :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}.$$

V Multiplication par un réel et colinéarité

Définition

Soit k un nombre réel et $\vec{u}$ un vecteur. Le vecteur $k\vec{u}$ est obtenu en multipliant la norme de $\vec{u}$:

- si $k > 0$, $k\vec{u}$ a la même direction et le même sens que $\vec{u}$;
- si $k < 0$, $k\vec{u}$ a la même direction mais un sens opposé ;
- si $k = 0$, $k\vec{u} = \vec{0}$.

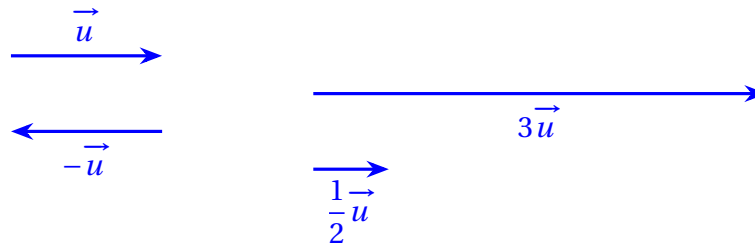
En particulier, $-\vec{u}$ est le vecteur **opposé** à $\vec{u}$.

Il a même direction et même norme que $\vec{u}$, mais le sens opposé.

Exemple

Si $\vec{u}$ représente un déplacement de 2 kilomètres vers l'est, alors :

- $3\vec{u}$ représente un déplacement de 6 kilomètres vers l'est ;
- $-\vec{u}$ représente un déplacement de 2 kilomètres vers l'ouest ;
- $\frac{1}{2}\vec{u}$ représente un déplacement de 1 kilomètre vers l'est.



Définition

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** lorsqu'il existe un nombre réel k tel que :

$$\vec{v} = k\vec{u}.$$

Autrement dit, ils ont la même direction (ou bien l'un des deux est le vecteur nul).

Exemple

Tous les vecteurs de l'exemple précédent sont colinéaires.