

Vecteurs et coordonnées

Prélude - Historique et contexte

Au XVII^e siècle, René Descartes et Pierre de Fermat ont l'idée de repérer les points par des nombres : c'est la naissance de la géométrie analytique. Les problèmes de géométrie deviennent des calculs. Les vecteurs, formalisés au XIX^e siècle, permettent de décrire des déplacements, des forces ou des vitesses. En les munissant de coordonnées, on peut prouver un alignement ou un parallélisme par un simple calcul.

I Base et coordonnées d'un vecteur

Définition

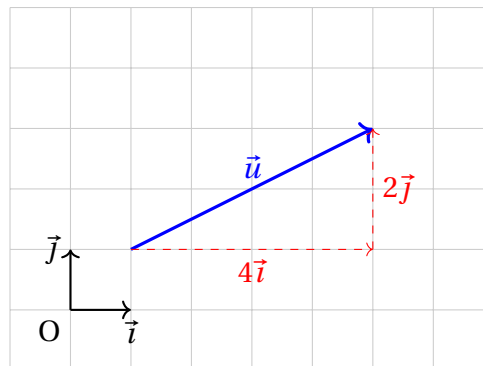
Deux vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ non colinéaires forment une **base** du plan. Tout vecteur $\vec{u}$ s'écrit alors de manière unique sous la forme

$$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}.$$

Le couple $(x ; y)$ est le couple de **coordonnées** de $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$. On note $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Si $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont orthogonaux et de norme 1, la base est dite **orthonormée**. Avec une origine O, on obtient un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Exemple



Ici $\vec{u} = 4\vec{i} + 2\vec{j}$ donc $\vec{u} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Propriété

Dans un repère, si $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$, alors :

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$$

Propriétés - Opérations

Si $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ et k un réel :

$$\vec{u} + \vec{v} \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix} \quad k\vec{u} \begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$$

Deux vecteurs sont égaux si et seulement s'ils ont les mêmes coordonnées.

Exemple

$A(1; -2)$ et $B(4; 3)$ donnent $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$. Avec $\vec{v} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$: $\overrightarrow{AB} + 2\vec{v} \begin{pmatrix} 3-2 \\ 5+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \end{pmatrix}$.

II Milieu, norme et distance

Propriété

Le milieu I de $[AB]$ vérifie $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$; ses coordonnées sont :

$$x_I = \frac{x_A + x_B}{2} \quad y_I = \frac{y_A + y_B}{2}$$

Propriété

Dans une base **orthonormée**, la norme de $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ (théorème de Pythagore).

En particulier, la distance AB vaut : $AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

Exemple

$A(1; -2)$ et $B(4; 2)$: le milieu de $[AB]$ est $I(2,5; 0)$ et $AB = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$.

III Déterminant et colinéarité

Définition

Le **déterminant** des vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ est le nombre :

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y$$

Propriété

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** (il existe un réel k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$, ou l'un des deux est nul) si et seulement si $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$.

Exemple

$\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -6 \\ 9 \end{pmatrix}$: $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 2 \times 9 - (-6) \times (-3) = 18 - 18 = 0$. Ils sont colinéaires (d'ailleurs $\vec{v} = -3\vec{u}$).

Propriété - Applications

- Trois points A, B, C sont **alignés** si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.
- Les droites (AB) et (CD) sont **parallèles** si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

Exemple

$A(1; 1), B(3; 5), C(4; 7) : \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \det = 2 \times 6 - 3 \times 4 = 0$. Les points sont alignés.

IV Homothétie

Définition

Soit O un point et k un réel non nul. L'**homothétie** de centre O et de rapport k transforme tout point M en le point M' tel que $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$.

Si $k > 1$ la figure est agrandie, si $0 < k < 1$ elle est réduite, si $k < 0$ elle est de plus « retournée » de l'autre côté de O .

Remarque - Python

```
from math import sqrt
def distance(xA, yA, xB, yB):
    return sqrt((xB - xA)**2 + (yB - yA)**2)
```