Combinatoire et dénombrement

Prélude - Historique et contexte

Compter sans énumérer : c'est l'objet de la combinatoire. Le triangle dit « de Pascal » était connu des mathématiciens indiens, perses (Al-Karaji) et chinois (Yang Hui) bien avant Pascal, qui l'étudie en 1654 dans sa correspondance avec Fermat sur les jeux de hasard. Aujourd'hui, le dénombrement intervient en probabilités, en cryptographie (nombre de mots de passe possibles) et en informatique (complexité des algorithmes).

I Principes de dénombrement

Propriété - Principe additif

Si A et B sont deux ensembles finis **disjoints**, $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B)$.

Définition - Produit cartésien

Le **produit cartésien** $A \times B$ est l'ensemble des couples $(a\,;\,b)$ avec $a \in A$ et $b \in B$. Plus généralement, A^k est l'ensemble des k-uplets (ou k-listes) d'éléments de A.

Propriété - Principe multiplicatif

$\text{card}(A \times B) = \text{card}(A) \times \text{card}(B)$. Si $\text{card}(E) = n$, le nombre de k-uplets d'éléments de E est $\boxed{n^k}$.

Exemple

Un code de carte bancaire comporte 4 chiffres : il y a $10^4 = 10\,000$ codes possibles. Un octet est un 8-uplet de 0 et de 1 : il y a $2^8 = 256$ octets.

II Arrangements et permutations

Définition - Factorielle

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$, et par convention $0! = 1$.

Propriété

Soit E un ensemble à n éléments et $k \leqslant n$.

- Le nombre de k-uplets d'éléments **distincts** (arrangements) de E est $n \times (n-1) \times \cdots \times (n-k+1) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$.
- Le nombre de **permutations** de E (façons d'ordonner ses n éléments) est $n!$.

Exemple

Podium de 3 coureurs parmi 8 : $8 \times 7 \times 6 = 336$ possibilités. Façons de ranger 5 livres sur une étagère : $5! = 120$.

III Combinaisons

Définition

Une **combinaison** de k éléments de E est une partie de E à k éléments (l'ordre ne compte pas).

Leur nombre est noté $\binom{n}{k}$.

Propriété

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-k+1)}{k!}$$

En effet, chaque partie à k éléments donne $k!$ arrangements.

Propriété - Formules

- Symétrie : $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$; $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{1} = n$.
- Relation de Pascal : $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$.
- Nombre de parties : $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

Démonstration - Nombre de parties

Une partie de E est déterminée en décidant, pour chacun des n éléments, s'il y appartient ou non : c'est un n-uplet de « oui/non », soit 2^n parties. En les classant selon leur nombre k d'éléments, on obtient la somme des $\binom{n}{k}$.

Exemple

Une main de 5 cartes dans un jeu de 32 : $\binom{32}{5} = 201\,376$ mains. Mains contenant exactement 2 as : $\binom{4}{2} \times \binom{28}{3} = 6 \times 3\,276 = 19\,656$.

Méthode - Choisir le bon modèle

	L'ordre compte	L'ordre ne compte pas
Répétitions possibles	n^k (k-uplets)	(hors programme)
Sans répétition	$\frac{n!}{(n-k)!}$ (arrangements)	$\binom{n}{k}$ (combinaisons)