Continuité

Prélude - Historique et contexte

Pour Euler, une fonction « continue » était donnée par une seule formule. Bolzano (1817) puis Cauchy donnent la définition moderne : une petite variation de x entraîne une petite variation de $f(x)$. Bolzano démontre le théorème des valeurs intermédiaires, qui justifie les méthodes numériques de résolution d'équations, comme la dichotomie utilisée par les calculatrices et les logiciels.

I Fonctions continues

Définition

Soit f définie sur un intervalle I et $a \in I$. f est **continue en** a si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$. f est continue sur I si elle est continue en tout point de I.
Graphiquement, la courbe d'une fonction continue sur un intervalle se trace « sans lever le crayon ».

Propriété

- Les fonctions polynômes, rationnelles, racine carrée, exponentielle, valeur absolue, cosinus et sinus sont continues sur chaque intervalle de leur ensemble de définition.
- Les sommes, produits, quotients et composées de fonctions continues sont continues.
- Toute fonction **dérivable** sur I est **continue** sur I. La réciproque est fausse : $x \mapsto |x|$ est continue en 0 mais pas dérivable en 0.

Exemple - Fonction définie par morceaux

$f(x) = x^2$ si $x \leqslant 1$ et $f(x) = ax+3$ si $x > 1$. f est continue en 1 si $\lim\limits_{x \to 1^+} (ax+3) = f(1) = 1$, soit $a+3 = 1$, donc $a = -2$.

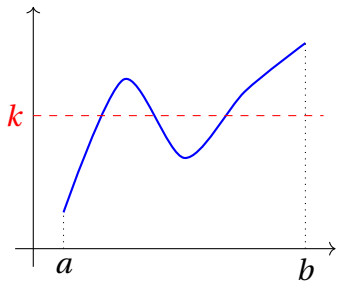
Propriété - Suite et fonction continue

Si (u_n) converge vers ℓ et si f est continue en ℓ, alors $\lim f(u_n) = f(\ell)$. En particulier, si $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers ℓ, alors $f(\ell) = \ell$.

II Théorème des valeurs intermédiaires

Propriété - Théorème des valeurs intermédiaires (admis)

Si f est continue sur $[a\,;\,b]$, alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet **au moins une** solution dans $[a\,;\,b]$.



Propriété - Corollaire (cas strictement monotone)

Si f est **continue** et **strictement monotone** sur $[a\,;\,b]$, alors pour tout k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une **unique** solution dans $[a\,;\,b]$.
Ce résultat s'étend aux intervalles ouverts ou non bornés, en remplaçant $f(a)$ et $f(b)$ par les limites.

Méthode - Rédaction type

Montrons que $x^3 + x - 1 = 0$ a une unique solution α sur $[0\,;\,1]$. La fonction $f(x) = x^3 + x - 1$ est continue (polynôme) et strictement croissante sur $[0\,;\,1]$ car $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$. De plus $f(0) = -1 < 0$ et $f(1) = 1 > 0$. D'après le corollaire du TVI, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[0\,;\,1]$. À la calculatrice : $0,68 < \alpha < 0,69$.

III Approximation d'une solution

Méthode - Dichotomie

On encadre la solution α de $f(x) = 0$ dans $[a\,;\,b]$ avec $f(a)$ et $f(b)$ de signes contraires. On calcule $m = \frac{a+b}{2}$: si $f(a)$ et $f(m)$ sont de même signe, $\alpha \in [m\,;\,b]$, sinon $\alpha \in [a\,;\,m]$. On recommence jusqu'à la précision voulue.

```
def dichotomie(f, a, b, e):
    while b - a > e:
        m = (a + b) / 2
        if f(a) * f(m) > 0:
            a = m
        else :
            b = m
    return a, b
```