# Dérivation et convexité

## Prélude - Historique et contexte

La notion de convexité remonte à Archimède, qui l'utilisait pour encadrer la longueur d'un cercle. Au début du XX$^{e}$ siècle, Jensen formalise les fonctions convexes et leurs inégalités. Aujourd'hui, la convexité est centrale en optimisation : une fonction convexe n'a qu'un seul « creux », ce qui garantit que les algorithmes d'apprentissage automatique trouvent bien le minimum cherché.

## I Dérivée d'une fonction composée

### Définition - Composée

Soit $u$ définie sur $I$ à valeurs dans $J$ et $g$ définie sur $J$. La **composée** de $u$ suivie de $g$ est la fonction $g \circ u : x \mapsto g\big(u(x)\big)$.

### Exemple

Avec $u(x) = 3x+1$ et $g(x) = \sqrt{x}$ : $g \circ u(x) = \sqrt{3x+1}$ et $u \circ g(x) = 3\sqrt{x}+1$. En général $g \circ u \neq u \circ g$.

### Propriété - Dérivée d'une composée

Si $u$ est dérivable sur $I$ et $g$ dérivable sur $J$, alors $g \circ u$ est dérivable sur $I$ et

$$\boxed{(g \circ u)'(x) = u'(x) \times g'\big(u(x)\big)}$$

Cas particuliers :

| Fonction | $\sqrt{u}$ $(u > 0)$ | $u^n$ $(n \in \mathbb{Z}^*)$ | $\mathrm{e}^u$ |
|---|---|---|---|
| Dérivée | $\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ | $n\,u'\,u^{n-1}$ | $u'\,\mathrm{e}^u$ |

### Exemple

$f(x) = (x^2+1)^5$ : $f'(x) = 5 \times 2x \times (x^2+1)^4 = 10x(x^2+1)^4$.

$h(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ : $h'(x) = -2x\,\mathrm{e}^{-x^2}$.

## II Dérivée seconde et convexité

### Définition - Dérivée seconde

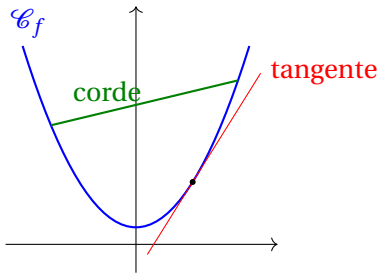
Si $f'$ est dérivable sur $I$, sa dérivée est la **dérivée seconde** de $f$, notée $f''$.

### Définition - Fonction convexe, concave

Soit $f$ dérivable sur $I$, de courbe $\mathscr{C}_f$.

- $f$ est **convexe** sur $I$ si $\mathscr{C}_f$ est située au-dessus de toutes ses tangentes ;
- $f$ est **concave** sur $I$ si $\mathscr{C}_f$ est située en dessous de toutes ses tangentes.

De façon équivalente, $f$ est convexe si tout segment joignant deux points de $\mathscr{C}_f$ (une **corde**) est au-dessus de la courbe.




### Propriété - Caractérisation (admise)

Soit $f$ deux fois dérivable sur $I$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

$$f \text{ convexe sur } I \iff f' \text{ croissante sur } I \iff f''(x) \geqslant 0 \text{ pour tout } x \in I.$$

De même, $f$ concave $\iff$ $f'$ décroissante $\iff$ $f'' \leqslant 0$.

### Exemple

- $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto \mathrm{e}^x$ sont convexes sur $\mathbb{R}$ ; $x \mapsto \sqrt{x}$ est concave sur $]0\,;\,+\infty[$.
- $x \mapsto x^3$ : $f''(x) = 6x$, concave sur $]-\infty\,;\,0]$, convexe sur $[0\,;\,+\infty[$.

## III Point d'inflexion et inégalités

### Définition - Point d'inflexion

Un **point d'inflexion** est un point où la courbe traverse sa tangente. La fonction change de convexité en ce point.

### Propriété

Si $f''$ s'annule en changeant de signe en $a$, alors le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse $a$ est un point d'inflexion.

### Méthode - Étudier la convexité

$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ : $f'(x) = 3x^2 - 6x$, $f''(x) = 6x - 6$. $f'' < 0$ sur $]-\infty\,;\,1[$ et $f'' > 0$ sur $]1\,;\,+\infty[$ : $f$ est concave puis convexe, et le point $A(1\,;\,0)$ est un point d'inflexion.

### Méthode - Utiliser la convexité pour une inégalité

La fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$ et sa tangente en 0 a pour équation $y = x+1$. La courbe est au-dessus de cette tangente, donc :

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{e}^x \geqslant x + 1.$$