Géométrie vectorielle dans l'espace

Prélude - Historique et contexte

La géométrie dans l'espace est étudiée depuis Euclide (livres XI à XIII des *Éléments*, consacrés aux solides). Au XVII^{e} siècle, Descartes et Fermat introduisent les coordonnées, puis au XIX^{e} siècle Grassmann et Hamilton développent le calcul vectoriel. Aujourd'hui, les vecteurs de l'espace sont partout : modélisation 3D, jeux vidéo, robotique, GPS.

I Vecteurs de l'espace

Définition

La notion de vecteur s'étend à l'espace : à toute translation est associé un vecteur, caractérisé par une direction, un sens et une norme. Les règles de calcul sont les mêmes que dans le plan :

- relation de Chasles : $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$;
- $ABDC$ est un parallélogramme si et seulement si $\vec{AB} = \vec{CD}$;
- multiplication par un réel, combinaisons linéaires $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}$.

Définition - Colinéarité

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** s'il existe un réel k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$ (ou $\vec{u} = \vec{0}$).

Trois points A, B, C sont alignés si et seulement si $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont colinéaires. Deux droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ sont colinéaires.

II Droites et plans de l'espace

Définition - Droite

Soit A un point et $\vec{u}$ un vecteur non nul. La **droite** passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ est l'ensemble des points M tels que $\vec{AM} = t\vec{u}$, $t \in \mathbb{R}$.

Définition - Plan

Soit A un point et $\vec{u}$, $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires. Le **plan** passant par A et dirigé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est l'ensemble des points M tels que $\vec{AM} = x\vec{u} + y\vec{v}$, avec $x, y \in \mathbb{R}$.
Le couple $(\vec{u}, \vec{v})$ est une **base** de la direction du plan.

Définition - Coplanarité

Trois vecteurs sont **coplanaires** si l'un d'eux est une combinaison linéaire des deux autres, par exemple $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$.

Quatre points A, B, C, D sont coplanaires si et seulement si $\vec{AB}$, $\vec{AC}$, $\vec{AD}$ sont coplanaires.

Propriété - Positions relatives

- Deux droites de l'espace sont soit **coplanaires** (sécantes ou parallèles), soit **non coplanaires**.
- Une droite et un plan sont sécants en un point, ou parallèles (la droite est alors incluse dans le plan ou disjointe).
- Deux plans sont sécants selon une droite, ou parallèles (confondus ou disjoints).

Propriété - Parallélisme

- Une droite est parallèle à un plan si et seulement si elle est parallèle à une droite de ce plan.
- Si deux droites sécantes d'un plan $\mathscr{P}$ sont respectivement parallèles à deux droites d'un plan $\mathscr{P}'$, alors $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont parallèles.
- **Théorème du toit :** si deux plans sécants contiennent deux droites parallèles, alors leur droite d'intersection est parallèle à ces deux droites.

III Bases et repères de l'espace

Définition

Trois vecteurs $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$ **non coplanaires** forment une **base** de l'espace : tout vecteur $\vec{u}$ s'écrit de manière unique $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$. Les réels $(x\,;\,y\,;\,z)$ sont les coordonnées de $\vec{u}$.

Si O est un point, $(O\,;\,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ est un **repère** : M a pour coordonnées $(x\,;\,y\,;\,z)$ si $\vec{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$.

Propriété - Calculs en coordonnées

Si $A(x_A\,;\,y_A\,;\,z_A)$ et $B(x_B\,;\,y_B\,;\,z_B)$:

- $\vec{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$; milieu $I\left(\dfrac{x_A + x_B}{2}\,;\,\dfrac{y_A + y_B}{2}\,;\,\dfrac{z_A + z_B}{2}\right)$;
- les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si leurs coordonnées sont proportionnelles.

Exemple

$\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{w}\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$. On cherche a, b tels que $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$: $a = 2$, $2a + b = 5$ donc $b = 1$, et $-a + 3b = 1$: vérifié. Les trois vecteurs sont coplanaires.