Limites de suites

Prélude - Historique et contexte

Le paradoxe d'Achille et de la tortue, énoncé par Zénon d'Élée (V^{e} siècle av. J.-C.), pose déjà la question d'une somme infinie de durées de plus en plus petites. Archimède calcule l'aire sous une parabole en sommant une infinité de triangles. Il faut attendre Cauchy (1821) pour une définition précise de la convergence. Les limites de suites modélisent l'évolution à long terme : population, dose de médicament, remboursement d'un emprunt.

I Limite d'une suite

Définition - Limite finie

La suite (u_n) **converge** vers le réel ℓ si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes u_n à partir d'un certain rang. On note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$. Cette limite, si elle existe, est unique.

Définition - Limite infinie

(u_n) a pour limite $+\infty$ si tout intervalle $]A\,;\,+\infty[$ contient tous les termes à partir d'un certain rang. Une suite qui ne converge pas est dite **divergente** (elle peut tendre vers $\pm\infty$ ou ne pas avoir de limite, comme $(-1)^n$).

Propriété - Suites de référence

$$\lim n = \lim n^2 = \lim \sqrt{n} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim \frac{1}{n} = \lim \frac{1}{n^2} = \lim \frac{1}{\sqrt{n}} = 0.$$

II Opérations sur les limites

Propriété

Les règles pour la somme, le produit et le quotient sont celles des fonctions. Les formes indéterminées sont $\infty - \infty$, $0 \times \infty$, $\dfrac{\infty}{\infty}$ et $\dfrac{0}{0}$.

Méthode - Lever une indétermination

$$u_n = \frac{2n^2 - n}{n^2 + 3} = \frac{n^2\left(2 - \frac{1}{n}\right)}{n^2\left(1 + \frac{3}{n^2}\right)} = \frac{2 - \frac{1}{n}}{1 + \frac{3}{n^2}}, \text{ donc } \lim u_n = 2.$$

III Limites et comparaison

Propriété - Comparaison

Si $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang et $\lim u_n = +\infty$, alors $\lim v_n = +\infty$. (De même avec $-\infty$.)

Propriété - Théorème des gendarmes

Si $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$ à partir d'un certain rang et si (v_n) et (w_n) convergent vers le même réel ℓ, alors (u_n) converge vers ℓ.

Exemple : $-\dfrac{1}{n} \leqslant \dfrac{(-1)^n}{n} \leqslant \dfrac{1}{n}$, donc $\lim \dfrac{(-1)^n}{n} = 0$.

Propriété - Limite de q^n (démonstration exigible pour $q > 1$)

- Si $q > 1$, $\lim q^n = +\infty$. Démonstration : $q = 1 + a$ avec $a > 0$; par l'inégalité de Bernoulli, $q^n \geqslant 1 + na$, et $1 + na \to +\infty$.
- Si $-1 < q < 1$, $\lim q^n = 0$. Si $q = 1$, $q^n = 1$. Si $q \leqslant -1$, (q^n) n'a pas de limite.

Exemple

$u_n = 5 - 3 \times 0,8^n$: $\lim 0,8^n = 0$ donc $\lim u_n = 5$. La somme $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} = 2\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)$ tend vers 2.

IV Suites monotones

Propriété - Théorème de convergence monotone (admis)

- Toute suite croissante et majorée converge. Toute suite décroissante et minorée converge.
- Une suite croissante non majorée tend vers $+\infty$ (démonstration exigible).

Propriété - Limite d'une suite $u_{n+1} = f(u_n)$

Si (u_n) converge vers ℓ et si f est continue en ℓ (voir le chapitre Continuité), alors ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$.

Exemple

$u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6}$: on a montré par récurrence que (u_n) est croissante et majorée par 3 ; elle converge vers $\ell \geqslant 0$ tel que $\sqrt{\ell + 6} = \ell$, soit $\ell^2 - \ell - 6 = 0$, donc $\ell = 3$ (l'autre solution, -2, est négative).