Représentations paramétriques et équations cartésiennes

Prélude - Historique et contexte

Descartes et Fermat ont associé au XVII^{e} siècle une équation à chaque courbe du plan. Dans l'espace, une droite ne peut pas être décrite par une seule équation : on la décrit par une **représentation paramétrique**, comme la trajectoire d'un mobile au cours du temps t. Un plan, lui, est décrit par une seule équation, grâce à un vecteur normal. Ces outils sont utilisés en modélisation 3D pour calculer les intersections entre rayons lumineux et surfaces.

I Représentation paramétrique d'une droite

Propriété

L'espace est muni d'un repère. La droite d passant par $A(x_A\ ;\ y_A\ ;\ z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(a\ ;\ b\ ;\ c)$ est l'ensemble des points $M(x\ ;\ y\ ;\ z)$ tels que $\vec{AM} = t\,\vec{u}$ avec $t \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} x = x_A + ta \\ y = y_A + tb \\ z = z_A + tc \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

C'est une **représentation paramétrique** de d. Elle n'est pas unique.

Exemple

La droite (AB) avec $A(1\ ;\ 0\ ;\ 2)$ et $B(3\ ;\ -1\ ;\ 5)$: $\vec{AB}(2\ ;\ -1\ ;\ 3)$, donc $(AB) : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -t \\ z = 2 + 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

Le point $C(7\ ;\ -3\ ;\ 11)$ appartient à (AB) : $t = 3$ convient dans les trois équations.

Remarque - Représentation paramétrique d'un plan

Le plan passant par A et dirigé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires est l'ensemble des points M tels que $\vec{AM} = t\vec{u} + s\vec{v}$, $(t\ ;\ s) \in \mathbb{R}^2$.

II Équation cartésienne d'un plan

Propriété (repère orthonormé)

- Le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}(a\ ;\ b\ ;\ c)$ est l'ensemble des points M tels que $\vec{AM} \cdot \vec{n} = 0$. Il admet une équation de la forme

$$\boxed{ax + by + cz + d = 0}$$

- Réciproquement, si $(a\ ;\ b\ ;\ c) \neq (0\ ;\ 0\ ;\ 0)$, l'ensemble des points vérifiant $ax + by + cz + d = 0$ est un plan de vecteur normal $\vec{n}(a\ ;\ b\ ;\ c)$.

Méthode - Déterminer une équation de plan

Plan passant par $A(1\ ;\ 2\ ;\ -1)$ de vecteur normal $\vec{n}(2\ ;\ -1\ ;\ 3)$: il a une équation $2x - y + 3z + d = 0$.
Comme A appartient au plan : $2 - 2 - 3 + d = 0$, donc $d = 3$. Équation : $2x - y + 3z + 3 = 0$.

Propriété - Positions relatives de deux plans

Deux plans de vecteurs normaux $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont parallèles si et seulement si $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont colinéaires ; ils sont perpendiculaires si et seulement si $\vec{n} \cdot \vec{n}' = 0$.

III Intersections et distances

Méthode - Intersection d'une droite et d'un plan

$d : x = 1 + t,\ y = 2t,\ z = 3 - t$ et $\mathscr{P} : x + y + z - 10 = 0$. On remplace : $(1 + t) + 2t + (3 - t) - 10 = 0$, soit $2t - 6 = 0$, $t = 3$. Le point d'intersection est $I(4\ ;\ 6\ ;\ 0)$.
Si l'équation n'a pas de solution, d est strictement parallèle à $\mathscr{P}$; si elle est vérifiée pour tout t, d est contenue dans $\mathscr{P}$.

Méthode - Projeté orthogonal sur un plan

Pour projeter M sur $\mathscr{P}$ de vecteur normal $\vec{n}$: on écrit une représentation paramétrique de la droite passant par M et dirigée par $\vec{n}$, puis on calcule son intersection H avec $\mathscr{P}$. La distance de M à $\mathscr{P}$ est MH.

Exemple

$M(1\ ;\ 1\ ;\ 4)$ et $\mathscr{P} : x + y + z - 3 = 0$. La droite : $x = 1 + t,\ y = 1 + t,\ z = 4 + t$. On obtient $3t + 3 = 0$, $t = -1$, $H(0\ ;\ 0\ ;\ 3)$ et $MH = \sqrt{3}$.

Méthode - Intersection de deux droites

Deux droites de l'espace peuvent être sécantes, parallèles ou **non coplanaires**. Pour chercher un point commun, on utilise deux paramètres différents (t et s) et on résout le système de trois équations.