Primitives et équations différentielles

Prélude - Historique et contexte

Newton et Leibniz découvrent à la fin du XVII^{e} siècle que dériver et « remonter » une dérivée sont deux opérations inverses. Les équations différentielles, qui relient une fonction à ses dérivées, sont nées avec la mécanique : la deuxième loi de Newton en est une. Elles modélisent aujourd'hui la décroissance radioactive, la charge d'un condensateur, le refroidissement d'un objet ou l'évolution d'une population.

I Primitives

Définition - Équation différentielle $y' = f$

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Une **primitive** de f sur I est une fonction F dérivable sur I telle que $F' = f$. On dit que F est solution de l'équation différentielle $y' = f$.

Propriété

- Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives (admis).
- Si F est une primitive de f sur I, les primitives de f sont les fonctions $x \mapsto F(x) + C$, $C \in \mathbb{R}$.
- Pour $x_0 \in I$ et y_0 réel, il existe une **unique** primitive F de f telle que $F(x_0) = y_0$.

Propriété - Primitives usuelles

$f(x)$	Une primitive $F(x)$	Intervalle	f (avec u)	Une primitive
k	kx	$\mathbb{R}$	$u'\,\mathrm{e}^{u}$	e^{u}
x^n $(n \neq -1)$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$ ou $]0;+\infty[$	$u'\,u^n$ $(n \neq -1)$	$\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln x$	$]0\,;\,+\infty[$	$\dfrac{u'}{u}$ $(u>0)$	$\ln u$
$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$]0\,;\,+\infty[$	$\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$ $(u>0)$	$2\sqrt{u}$
e^{x}	e^{x}	$\mathbb{R}$	$\cos x\,;\,\sin x$	$\sin x\,;\,-\cos x$

Exemple

- $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$: $F(x) = x^3 - 2x^2 + x$.
- $g(x) = x\,\mathrm{e}^{x^2} = \frac{1}{2} \times 2x\,\mathrm{e}^{x^2}$: $G(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2}$.
- $h(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$: $H(x) = \ln(x^2+1)$.

Méthode - Primitive vérifiant une condition

Primitive de $f(x) = 2x + \frac{1}{x}$ sur $]0\,;\,+\infty[$ qui vaut 3 en 1 : $F(x) = x^2 + \ln x + C$ et $F(1) = 1 + C = 3$, donc $C = 2$.

II Équation $y' = ay$

Propriété

Soit a un réel. Les solutions de $y' = ay$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $x \mapsto C\,\mathrm{e}^{ax}$, $C \in \mathbb{R}$.
Pour tout x_0 et y_0, il existe une unique solution telle que $y(x_0) = y_0$.

Démonstration

$x \mapsto C\mathrm{e}^{ax}$ est solution. Réciproquement, si y est solution, posons $g(x) = y(x)\,\mathrm{e}^{-ax}$: $g'(x) = y'(x)\mathrm{e}^{-ax} - a\,y(x)\mathrm{e}^{-ax} = 0$, donc g est constante égale à C et $y(x) = C\mathrm{e}^{ax}$.

Exemple - Décroissance radioactive

Le nombre de noyaux $N(t)$ vérifie $N' = -\lambda N$: $N(t) = N_0\,\mathrm{e}^{-\lambda t}$.

III Équation $y' = ay + b$

Propriété

Soit $a \neq 0$ et b deux réels. L'équation $y' = ay + b$ admet une solution constante $y_p = -\dfrac{b}{a}$. Ses solutions sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions

$$x \mapsto C\,\mathrm{e}^{ax} - \frac{b}{a}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Méthode

Résoudre $y' = -2y + 6$ avec $y(0) = 1$. Solution constante : $0 = -2k + 6$, $k = 3$. Solutions : $y(x) = C\mathrm{e}^{-2x} + 3$. Avec $y(0) = C + 3 = 1$: $C = -2$, donc $y(x) = 3 - 2\mathrm{e}^{-2x}$.

Remarque - Équation $y' = ay + f$

Si y_p est une solution particulière de $y' = ay + f$, les solutions sont les fonctions $x \mapsto C\mathrm{e}^{ax} + y_p(x)$: on ajoute à y_p les solutions de $y' = ay$.