Fonctions trigonométriques

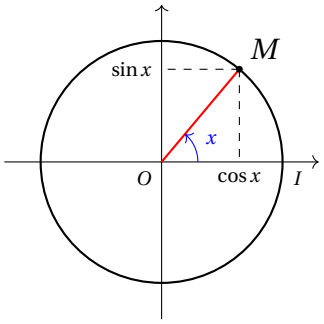
Prélude - Historique et contexte

Les tables de cordes d'Hipparque et de Ptolémée, puis les tables de sinus des astronomes indiens et arabes, servaient à calculer la position des astres. Au XVIII^{e} siècle, Euler fait du sinus et du cosinus de véritables fonctions d'une variable réelle. Ces fonctions périodiques modélisent tous les phénomènes oscillants : son, courant alternatif, marées, mouvement d'un pendule ; Fourier montre même que tout signal périodique est une somme de sinus et de cosinus.

I Rappels et propriétés

Rappel - Cercle trigonométrique

À tout réel x on associe le point M du cercle trigonométrique tel que x soit une mesure en radians de $\left(\vec{OI}, \vec{OM}\right)$. Alors $M(\cos x\,;\,\sin x)$ et



$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1, \qquad -1 \leqslant \cos x \leqslant 1, \qquad -1 \leqslant \sin x \leqslant 1.$$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Propriété - Parité et périodicité

Pour tout réel x :

- $\cos(x+2\pi) = \cos x$ et $\sin(x+2\pi) = \sin x$: les fonctions cos et sin sont **périodiques** de période 2π ;
- $\cos(-x) = \cos x$: cos est **paire** (courbe symétrique par rapport à l'axe des ordonnées) ;
- $\sin(-x) = -\sin x$: sin est **impaire** (courbe symétrique par rapport à l'origine).

Il suffit donc d'étudier ces fonctions sur $[0\,;\,\pi]$, puis de compléter par symétrie et translation.

II Dérivées et variations

Propriété - Dérivées

Les fonctions sin et cos sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et

$$\sin' = \cos, \qquad \cos' = -\sin.$$

Plus généralement, pour a et b réels : $\big(\cos(ax+b)\big)' = -a\sin(ax+b)$ et $\big(\sin(ax+b)\big)' = a\cos(ax+b)$.
Pour u dérivable : $(\cos u)' = -u'\sin u$ et $(\sin u)' = u'\cos u$.

Propriété - Limite remarquable

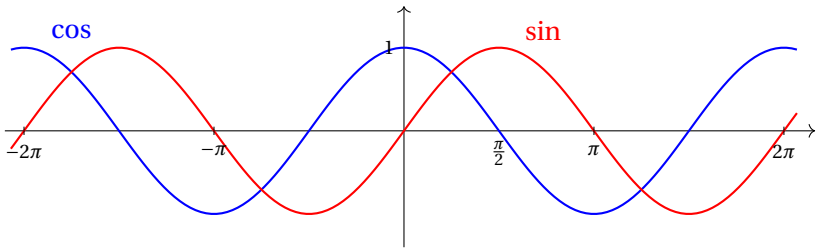
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

C'est le nombre dérivé de sin en 0 : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\sin 0}{x-0}=\cos 0=1$.

Propriété - Variations sur $[0\,;\,\pi]$

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
cos	1	↘		↘	-1
sin	0	↗	1	↘	0

Courbes



III Équations et inéquations

Propriété

Pour a réel fixé :

$\cos x=\cos a \iff x=a+2k\pi$ ou $x=-a+2k\pi$ $\qquad$ $\sin x=\sin a \iff x=a+2k\pi$ ou $x=\pi-a+2k\pi$ $\qquad$ $(k\in\mathbb{Z})$.

Méthode

Résoudre $\cos x=\frac{1}{2}$ sur $]-\pi\,;\,\pi]$: $\frac{1}{2}=\cos\frac{\pi}{3}$, donc $x=\frac{\pi}{3}$ ou $x=-\frac{\pi}{3}$.

Résoudre $\sin x\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$ sur $[0\,;\,2\pi[$: à l'aide du cercle, $x\in\left[\frac{\pi}{4}\,;\,\frac{3\pi}{4}\right]$.

Exemple - Étude d'une fonction

$f(x)=x-\sin x$ sur $\mathbb{R}$: $f'(x)=1-\cos x\geqslant 0$, donc f est croissante. Comme $f(0)=0$, on en déduit $\sin x\leqslant x$ pour tout $x\geqslant 0$.