# Loi binomiale

## Prélude - Historique et contexte

Jacques Bernoulli étudie, dans son *Ars Conjectandi* publié en 1713, la répétition d'une même expérience à deux issues. Le triangle arithmétique, connu en Chine et en Perse dès le XI$^{e}$ siècle, est popularisé en France par Blaise Pascal en 1654 dans sa correspondance avec Fermat sur les jeux de hasard. La loi binomiale sert aujourd'hui en contrôle qualité, en génétique et dans les sondages.

## I Lois discrètes de référence

### Rappel - Loi d'une variable aléatoire et espérance

Si $X$ prend les valeurs $x_1, \ldots, x_n$ avec les probabilités $p_1, \ldots, p_n$ : $E(X) = \sum p_i x_i$, $V(X) = \sum p_i \big(x_i - E(X)\big)^2$ et $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

### Définition - Loi uniforme sur $\{1\ ;\ \ldots\ ;\ n\}$

$X$ suit la loi uniforme sur $\{1\ ;\ 2\ ;\ \ldots\ ;\ n\}$ si $P(X = k) = \dfrac{1}{n}$ pour tout $k$. Alors $E(X) = \dfrac{n+1}{2}$.

Démonstration : $E(X) = \dfrac{1}{n}(1 + 2 + \cdots + n) = \dfrac{1}{n} \times \dfrac{n(n+1)}{2}$.

### Définition - Loi de Bernoulli

Une **épreuve de Bernoulli** a deux issues : succès (probabilité $p$) et échec $(1-p)$. La variable $X$ qui vaut 1 en cas de succès et 0 sinon suit la **loi de Bernoulli** de paramètre $p$ : $E(X) = p$, $V(X) = p(1-p)$, $\sigma(X) = \sqrt{p(1-p)}$.

## II Loi binomiale

### Définition - Schéma de Bernoulli

La répétition de $n$ épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes est un **schéma de Bernoulli**. On le représente par un arbre. Le nombre $X$ de succès suit la **loi binomiale** $\mathscr{B}(n\ ;\ p)$.

### Définition - Coefficients binomiaux

$\binom{n}{k}$ (« $k$ parmi $n$ ») est le nombre de chemins de l'arbre réalisant exactement $k$ succès. On a $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$, $\binom{n}{1} = n$, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ (symétrie) et la relation de Pascal $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$.

### Méthode - Triangle de Pascal

Chaque coefficient est la somme des deux coefficients situés au-dessus (relation de Pascal).
Lecture : $\binom{4}{2} = 6$, $\binom{5}{3} = 10$.

| $n \backslash k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | | | | | |
| 1 | 1 | 1 | | | | |
| 2 | 1 | 2 | 1 | | | |
| 3 | 1 | 3 | 3 | 1 | | |
| 4 | 1 | 4 | 6 | 4 | 1 | |
| 5 | 1 | 5 | 10 | 10 | 5 | 1 |

### Propriété - Loi binomiale

Si $X$ suit $\mathscr{B}(n\,;\,p)$, pour tout $k \in \{0\,;\,\ldots\,;\,n\}$ :

$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}, \qquad E(X)=np, \qquad \sigma(X)=\sqrt{np(1-p)} \text{ (admis).}$$

### Exemple

On lance 5 fois un dé équilibré ; $X$ = nombre de six suit $\mathscr{B}\left(5\,;\,\frac{1}{6}\right)$.

$P(X=2)=\binom{5}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^3=10\times\frac{125}{7776}\approx 0{,}161$ et $E(X)=\frac{5}{6}$.

## III Calculs et intervalles

### Méthode - Calculatrice

$P(X=k)$ : binomFdp (TI) ou Binomiale FdP (Casio) ; $P(X\leqslant k)$ : binomFRép ou Binomiale FR.
$P(X\geqslant k)=1-P(X\leqslant k-1)$ ; $P(a\leqslant X\leqslant b)=P(X\leqslant b)-P(X\leqslant a-1)$.

### Méthode - Déterminer un intervalle de probabilité supérieure à $1-\alpha$

$X$ suit $\mathscr{B}(100\,;\,0{,}3)$. On cherche $a$ et $b$ tels que $P(a\leqslant X\leqslant b)\geqslant 0{,}95$ : on prend $a$ le plus petit entier tel que $P(X\leqslant a)>0{,}025$ et $b$ le plus petit entier tel que $P(X\leqslant b)\geqslant 0{,}975$.
Avec la table de la calculatrice : $a=21$, $b=39$, et $P(21\leqslant X\leqslant 39)\approx 0{,}96$.

### Exemple - Avec des probabilités conditionnelles

Un test détecte un défaut avec probabilité 0,9 ; 5 % des pièces sont défectueuses. On contrôle 20 pièces au hasard (tirages assimilés à des tirages avec remise) ; le nombre de pièces défectueuses **détectées** suit $\mathscr{B}(20\,;\,0{,}05\times 0{,}9)=\mathscr{B}(20\,;\,0{,}045)$.