# Dérivation et convexité

## Prélude - Historique et contexte

Au XVII$^{e}$ siècle, Newton et Leibniz inventent indépendamment le calcul différentiel pour étudier les mouvements et les tangentes. La notion de convexité, étudiée par Jensen au début du XX$^{e}$ siècle, décrit la façon dont une courbe « tourne ». En économie, une fonction de coût convexe traduit des coûts marginaux croissants ; un point d'inflexion marque, par exemple, le moment où une épidémie commence à ralentir.

## I Limites et continuité

### Propriété - Limites des fonctions de référence

| $f(x)$ | $x^2$ | $x^3$ | $\sqrt{x}$ | $\frac{1}{x}$ | $\mathrm{e}^x$ |
|---|---|---|---|---|---|
| en $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | 0 | $+\infty$ |
| en $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | | 0 | 0 |
| en 0 | 0 | 0 | 0 | $-\infty$ à gauche, $+\infty$ à droite | 1 |

### Définition - Asymptotes

- Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ (ou en $-\infty$), la droite d'équation $y = \ell$ est **asymptote horizontale** à la courbe.
- Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$, la droite d'équation $x = a$ est **asymptote verticale** à la courbe.

### Propriété - Théorème des valeurs intermédiaires (admis)

Si $f$ est continue et strictement monotone sur $[a\,;\,b]$, alors pour tout réel $k$ compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une **unique** solution dans $[a\,;\,b]$.
Une valeur approchée s'obtient par balayage ou par dichotomie à la calculatrice.

## II Dérivation

### Propriété - Dérivées de fonctions composées

Avec $u$ dérivable :

| $f(x)$ | $g(ax+b)$ | $\mathrm{e}^{u(x)}$ | $u(x)^2$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $a\,g'(ax+b)$ | $u'(x)\,\mathrm{e}^{u(x)}$ | $2u'(x)u(x)$ |

### Exemple

$f(x) = \mathrm{e}^{-0{,}5x+1}$ : $f'(x) = -0{,}5\,\mathrm{e}^{-0{,}5x+1} < 0$, donc $f$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

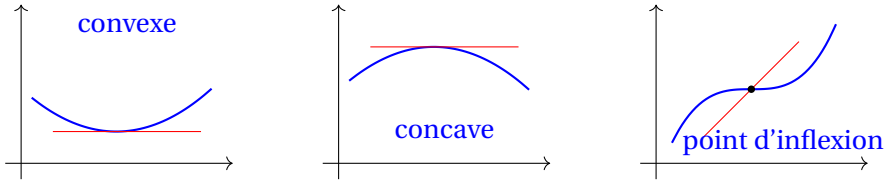
### Définition - Dérivée seconde

Si $f'$ est dérivable, sa dérivée est la **dérivée seconde** de $f$, notée $f''$.

# III Convexité

## Définition

Une fonction $f$ dérivable sur un intervalle $I$ est **convexe** sur $I$ si sa courbe est située au-dessus de chacune de ses tangentes (de manière équivalente, en dessous de ses sécantes entre les deux points). Elle est **concave** si sa courbe est en dessous de ses tangentes.




## Propriété - Caractérisation (admise)

Si $f$ est deux fois dérivable sur $I$ : $f$ convexe sur $I \iff f'$ croissante sur $I \iff f'' \geqslant 0$ sur $I$.
De même, $f$ concave $\iff f'$ décroissante $\iff f'' \leqslant 0$.

## Définition - Point d'inflexion

Un **point d'inflexion** est un point où la courbe traverse sa tangente : la fonction change de convexité.
Si $f''$ s'annule en changeant de signe en $a$, le point d'abscisse $a$ est un point d'inflexion.

## Méthode - Étudier la convexité

$f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ : $f'(x) = 3x^2 - 6x$, $f''(x) = 6x - 6$.
$f''(x) \geqslant 0 \iff x \geqslant 1$ : $f$ est concave sur $]-\infty\,;\,1]$, convexe sur $[1\,;\,+\infty[$, et le point $(1\,;\,-1)$ est un point d'inflexion.