Équations différentielles

Prélude - Historique et contexte

Les équations différentielles naissent avec le calcul infinitésimal : Newton écrit en 1687 que l'accélération d'un corps est proportionnelle à la force qu'il subit. En 1768, Euler propose une méthode pour en calculer des solutions approchées pas à pas, ancêtre des simulations numériques actuelles. Elles décrivent le refroidissement d'un objet (loi de Newton), la charge d'un condensateur, l'évolution d'une population ou l'élimination d'un médicament.

I Notion d'équation différentielle

Définition

Une **équation différentielle** est une égalité liant une fonction inconnue y, sa dérivée y' et éventuellement la variable. Une **solution** sur I est une fonction dérivable sur I qui vérifie cette égalité pour tout x de I.

Méthode - Vérifier qu'une fonction est solution

$f(x) = x^2 + 2x$ est-elle solution de $xy' - y = x^2$ sur $\mathbb{R}$?
$f'(x) = 2x + 2$ et $xf'(x) - f(x) = 2x^2 + 2x - x^2 - 2x = x^2$: oui.

Rappel - Équation $y' = f$

Les solutions de $y' = f$ sont les primitives de f (chapitre 7).

II Équation $y' = ay$

Propriété

Soit a un réel. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $y' = ay$ sont les fonctions $x \mapsto C\mathrm{e}^{ax}$, où C est une constante réelle.
Pour tout réel x_0 et tout réel y_0, il existe une unique solution telle que $y(x_0) = y_0$.

Démonstration

$x \mapsto C\mathrm{e}^{ax}$ est solution car sa dérivée est $aC\mathrm{e}^{ax}$. Réciproquement, si y est solution, on pose $g(x) = y(x)\mathrm{e}^{-ax}$. Alors $g'(x) = y'(x)\mathrm{e}^{-ax} - ay(x)\mathrm{e}^{-ax} = (y'(x) - ay(x))\mathrm{e}^{-ax} = 0$, donc g est constante égale à C, et $y(x) = C\mathrm{e}^{ax}$.

Exemple

Une population de bactéries vérifie $N' = 0{,}3N$ avec $N(0) = 500$: $N(t) = 500\,\mathrm{e}^{0{,}3t}$.

III Équation $y' = ay + b$

Propriété

Soit $a \neq 0$ et b des réels.

- La fonction constante $x \mapsto -\dfrac{b}{a}$ est une solution particulière.
- Les solutions de $y' = ay + b$ sont les fonctions $x \mapsto C\,\mathrm{e}^{ax} - \dfrac{b}{a}$, $C \in \mathbb{R}$.

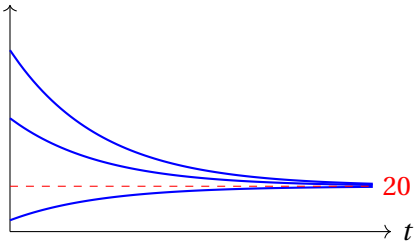
Justification : y est solution si et seulement si $z = y + \dfrac{b}{a}$ vérifie $z' = az$.

Exemple - Refroidissement

Un café à 80 °C est posé dans une pièce à 20 °C. Sa température vérifie $T' = -0{,}1\,T + 2$.
Solution constante : $-0{,}1\,T + 2 = 0$ donne $T = 20$. Donc $T(t) = C\mathrm{e}^{-0{,}1\,t} + 20$; $T(0) = 80$ donne $C = 60$.
$T(t) = 60\,\mathrm{e}^{-0{,}1\,t} + 20$, qui tend vers 20 : la température tend vers celle de la pièce.

Propriété - Allure des courbes

Pour $a < 0$, toutes les solutions de $y' = ay + b$ tendent vers $-\dfrac{b}{a}$ en $+\infty$: la droite $y = -\dfrac{b}{a}$ est asymptote. Pour $a > 0$, les solutions non constantes tendent vers $\pm\infty$.



Méthode - Méthode d'Euler

Pour approcher la solution de $y' = ay + b$ avec $y(0) = y_0$, on utilise $y(t + h) \approx y(t) + h\,y'(t)$:

```
def euler(a, b, y0, h, n):
    t, y = 0, y0
    for k in range(n):
        y = y + h * (a * y + b)
        t = t + h
    return y
```