Fonction exponentielle

Prélude - Historique et contexte

Le nombre e $\approx 2{,}718$ apparaît en 1683 chez Jacques Bernoulli, à propos d'intérêts composés de plus en plus fréquents. Euler lui donne son nom et étudie la fonction exponentielle au XVIII^{e} siècle. Cette fonction modélise toutes les évolutions dont la vitesse est proportionnelle à la quantité présente : croissance d'une population de bactéries, désintégration radioactive, refroidissement d'un café, décharge d'un condensateur.

I Rappels et propriétés algébriques

Rappel - Définition

La fonction exponentielle est l'unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$. On note $f(x) = \exp(x) = \mathrm{e}^x$. Pour tout réel x, $\mathrm{e}^x > 0$.

Propriété - Équation fonctionnelle

Pour tous réels a et b et tout entier n :

$$\mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^a \mathrm{e}^b \qquad \mathrm{e}^{-a} = \frac{1}{\mathrm{e}^a} \qquad \mathrm{e}^{a-b} = \frac{\mathrm{e}^a}{\mathrm{e}^b} \qquad \left(\mathrm{e}^a\right)^n = \mathrm{e}^{na}.$$

Propriété - Équations et inéquations

Pour tous réels a et b : $\mathrm{e}^a = \mathrm{e}^b \iff a = b$ et $\mathrm{e}^a < \mathrm{e}^b \iff a < b$.

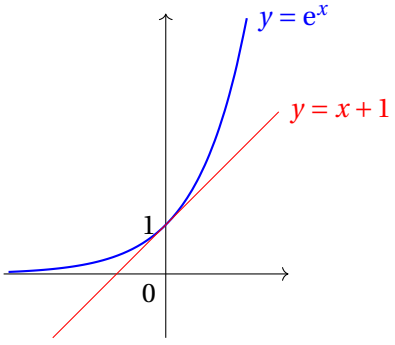
Exemple

$\mathrm{e}^{2x-1} \geqslant \mathrm{e}^{x+3} \iff 2x - 1 \geqslant x + 3 \iff x \geqslant 4$.

II Étude de la fonction exponentielle

Propriété - Variations et limites

- exp est strictement croissante et convexe sur $\mathbb{R}$.
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$: l'axe des abscisses est asymptote horizontale en $-\infty$.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$.
- La tangente en 0 a pour équation $y = x + 1$, et $\mathrm{e}^x \geqslant x + 1$ pour tout réel x (convexité).



Propriété - Dérivée de e^u

Si u est dérivable sur I, alors $x \mapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur I et $(e^u)' = u' e^u$.
Cas particulier : $\left(e^{kx}\right)' = k e^{kx}$.

III Modèles exponentiels

Propriété - Fonctions $t \mapsto e^{kt}$

Si $k > 0$, $t \mapsto e^{kt}$ est croissante et tend vers $+\infty$ (croissance exponentielle). Si $k < 0$, elle est décroissante et tend vers 0 en $+\infty$ (décroissance exponentielle).

Exemple - Refroidissement

La température d'un café est $T(t) = 20 + 60\,e^{-0{,}05t}$ (t en minutes).
$T'(t) = -3\,e^{-0{,}05t} < 0$: le café refroidit, et $\lim\limits_{t \to +\infty} T(t) = 20$: la température tend vers celle de la pièce.

Méthode - Étudier $f(x) = (ax+b)e^{kx}$

On dérive un produit : $f'(x) = a e^{kx} + (ax+b)k e^{kx} = (kax + kb + a)e^{kx}$. Comme $e^{kx} > 0$, $f'(x)$ est du signe de $kax + kb + a$.