Loi géométrique

Prélude - Historique et contexte

Combien de lancers faut-il en moyenne pour obtenir un six ? Cette question, liée aux paris du chevalier de Méré au XVIIe siècle, conduit à la loi géométrique : on compte le nombre d'essais nécessaires pour obtenir le premier succès. On l'utilise pour modéliser le temps d'attente d'un événement discret : nombre de tentatives de connexion, de tirs avant de marquer, de jours avant une panne.

I Définition et calcul de probabilités

Définition

On répète une épreuve de Bernoulli de paramètre $p \in]0\,;\,1[$ de façon indépendante, jusqu'au premier succès. Le rang X du premier succès suit la **loi géométrique** de paramètre p, notée $\mathscr{G}(p)$. X prend les valeurs 1, 2, 3…

Propriété

Si X suit $\mathscr{G}(p)$, pour tout entier $k \geqslant 1$:

$$P(X = k) = (1-p)^{k-1}p \qquad P(X > k) = (1-p)^{k} \qquad P(X \leqslant k) = 1-(1-p)^{k}.$$

Justification : $X = k$ signifie $k-1$ échecs puis un succès ; $X > k$ signifie k échecs.

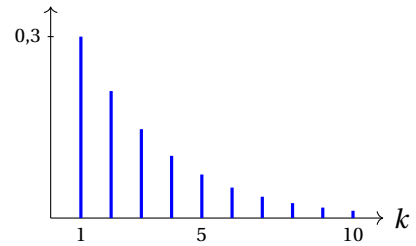
Exemple

On lance un dé équilibré jusqu'à obtenir un six : $X \sim \mathscr{G}\left(\frac{1}{6}\right)$.

$P(X = 3) = \left(\frac{5}{6}\right)^{2} \times \frac{1}{6} = \frac{25}{216} \approx 0{,}116$ et $P(X > 10) = \left(\frac{5}{6}\right)^{10} \approx 0{,}162$.

Propriété - Représentation graphique

Les probabilités $P(X = k)$ forment une suite géométrique de raison $1-p$: le diagramme en bâtons décroît. La valeur la plus probable est toujours $k = 1$.



$\mathscr{G}(0{,}3)$

II Espérance et absence de mémoire

Propriété - Espérance (admise)

Si X suit $\mathscr{G}(p)$, alors $E(X) = \dfrac{1}{p}$.

Exemple : il faut en moyenne 6 lancers pour obtenir un six.

Propriété - Absence de mémoire

Si X suit $\mathscr{G}(p)$, pour tous entiers naturels n et k :

$$P_{(X>n)}(X > n+k) = P(X > k).$$

Démonstration : $P_{(X>n)}(X > n+k) = \dfrac{P(X > n+k)}{P(X > n)} = \dfrac{(1-p)^{n+k}}{(1-p)^n} = (1-p)^k = P(X > k)$.

Interprétation : avoir déjà échoué n fois ne change pas la probabilité d'attendre encore plus de k essais. Le hasard « n'a pas de mémoire ».

Propriété - Caractérisation (admise)

Une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ qui vérifie la propriété d'absence de mémoire suit une loi géométrique.

Méthode - Simuler avec Python

```
from random import random
def rang_premier_succes(p):
    k = 1
    while random() >= p:
        k = k + 1
    return k
```

En moyennant les résultats de nombreux appels, on retrouve environ $\dfrac{1}{p}$.