Primitives et intégration

Prélude - Historique et contexte

Archimède calcule l'aire d'un segment de parabole vers 250 av. J.-C. en l'encadrant par des triangles. Au XVII^{e} siècle, Newton et Leibniz découvrent que le calcul d'aires est l'opération inverse de la dérivation : c'est le théorème fondamental de l'analyse. Leibniz introduit le symbole $\int$, un « S » allongé pour « somme ». Les intégrales servent à calculer des distances à partir de vitesses, des volumes, des énergies ou des valeurs moyennes.

I Primitives

Définition

Soit f continue sur un intervalle I. Une **primitive** de f sur I est une fonction F dérivable sur I telle que $F' = f$: F est solution de l'équation différentielle $y' = f$.

Propriété

Si F est une primitive de f sur I, les primitives de f sur I sont les fonctions $x \mapsto F(x) + C$, $C \in \mathbb{R}$.
Démonstration : si $G' = F' = f$, alors $(G-F)' = 0$, donc $G - F$ est constante sur l'intervalle I.

Propriété - Primitives usuelles

$f(x)$	k	x^n $(n \neq -1)$	$\frac{1}{x}$ $(x>0)$	e^x	$2u'u$	$u'\mathrm{e}^u$	$\frac{u'}{u}$ $(u>0)$
$F(x)$	kx	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\ln x$	e^x	u^2	e^u	$\ln u$

Exemple

Une primitive de $f(x) = 2x\mathrm{e}^{x^2}$ est $F(x) = \mathrm{e}^{x^2}$; une primitive de $g(x) = \dfrac{3}{3x+1}$ sur $\left]-\frac{1}{3}\,;\,+\infty\right[$ est $G(x) = \ln(3x+1)$.

II Intégrale d'une fonction

Définition

Soit f continue et positive sur $[a\,;\,b]$. L'**intégrale** de a à b de f, notée $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, est l'aire (en unités d'aire) du domaine compris entre la courbe, l'axe des abscisses et les droites $x = a$ et $x = b$.
Si f est négative, l'intégrale est l'opposé de l'aire ; dans le cas général, on compte positivement les aires au-dessus de l'axe et négativement celles en dessous.

Propriété - Théorème fondamental

Si f est continue sur $[a\,;\,b]$, la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est la primitive de f qui s'annule en a. Par conséquent, si F est une primitive de f :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a).$$

Exemple

$\int_0^2 (3x^2+1)\,\mathrm{d}x = \left[x^3+x\right]_0^2 = 10.$

Propriété - Linéarité, Chasles, positivité

$\int_a^b (\alpha f+\beta g) = \alpha\int_a^b f+\beta\int_a^b g$; $\int_a^c f = \int_a^b f+\int_b^c f$; si $f \leqslant g$ sur $[a\,;\,b]$, $\int_a^b f \leqslant \int_a^b g$.

III Aires, valeur moyenne et approximation

Propriété - Aire entre deux courbes

Si $f \geqslant g$ sur $[a\,;\,b]$, l'aire entre les deux courbes est $\int_a^b \big(f(x)-g(x)\big)\,\mathrm{d}x$.

Définition - Valeur moyenne

La **valeur moyenne** de f sur $[a\,;\,b]$ est $\mu = \dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Si $m \leqslant f \leqslant M$ sur $[a\,;\,b]$, alors $m \leqslant \mu \leqslant M$.

Exemple : valeur moyenne de $x \mapsto x^2$ sur $[0\,;\,3]$: $\dfrac{1}{3}\left[\dfrac{x^3}{3}\right]_0^3 = 3$.

Méthode - Méthode des rectangles

On partage $[a\,;\,b]$ en n intervalles de largeur $h = \dfrac{b-a}{n}$ et on additionne les aires des rectangles :

```
def rectangles(f, a, b, n):
    h = (b - a) / n
    s = 0
    for k in range(n):
        s = s + f(a + k*h) * h
    return s
```

