Nombres complexes : point de vue algébrique

Prélude - Historique et contexte

Au XVI^{e} siècle, les algébristes italiens Tartaglia et Cardan découvrent des formules pour résoudre les équations du troisième degré. Pour certaines équations ayant pourtant des solutions réelles, leurs formules font apparaître des racines carrées de nombres négatifs. Bombelli ose calculer avec ces nombres « impossibles ». Descartes les appelle « imaginaires », Euler note i le nombre tel que $\mathrm{i}^2 = -1$, et Gauss leur donne au XIX^{e} siècle une interprétation géométrique. Ils sont aujourd'hui indispensables en électricité, en traitement du signal et en physique quantique.

I Forme algébrique

Définition - Propriété (admise)

Il existe un ensemble $\mathbb{C}$, appelé ensemble des **nombres complexes**, qui contient $\mathbb{R}$, muni d'une addition et d'une multiplication ayant les mêmes règles de calcul que dans $\mathbb{R}$, et contenant un nombre i tel que $\mathrm{i}^2 = -1$.
Tout nombre complexe z s'écrit de manière **unique** $z = a + \mathrm{i}b$ avec a et b réels : c'est sa **forme algébrique**.

- a est la **partie réelle** de z, notée $\mathrm{Re}(z)$; b est la **partie imaginaire**, notée $\mathrm{Im}(z)$.
- Si $b = 0$, z est réel ; si $a = 0$, z est **imaginaire pur**.

Propriété

Deux complexes sont égaux si et seulement s'ils ont même partie réelle et même partie imaginaire.
En particulier $a + \mathrm{i}b = 0 \iff a = 0$ et $b = 0$.

Exemple

$(2+3\mathrm{i}) + (1-5\mathrm{i}) = 3 - 2\mathrm{i}$; $(2+3\mathrm{i})(1-5\mathrm{i}) = 2 - 10\mathrm{i} + 3\mathrm{i} - 15\mathrm{i}^2 = 17 - 7\mathrm{i}$; $(1+\mathrm{i})^2 = 1 + 2\mathrm{i} + \mathrm{i}^2 = 2\mathrm{i}$.

II Conjugué et quotient

Définition

Le **conjugué** de $z = a + \mathrm{i}b$ est $\overline{z} = a - \mathrm{i}b$.

Propriété

Pour tous complexes z et z' :

- $z\overline{z} = a^2 + b^2$ est un réel positif ; $z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}(z)$; $z - \overline{z} = 2\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(z)$;
- z est réel $\iff \overline{z} = z$; z est imaginaire pur $\iff \overline{z} = -z$;
- $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$; $\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$; $\overline{z^n} = \overline{z}^n$; $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$ $(z' \neq 0)$.

Méthode - Forme algébrique d'un quotient

On multiplie numérateur et dénominateur par le conjugué du dénominateur :

$$\frac{3+\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}} = \frac{(3+\mathrm{i})(1+2\mathrm{i})}{(1-2\mathrm{i})(1+2\mathrm{i})} = \frac{3+6\mathrm{i}+\mathrm{i}-2}{1+4} = \frac{1+7\mathrm{i}}{5} = \frac{1}{5}+\frac{7}{5}\mathrm{i}.$$

Tout complexe non nul z admet un inverse $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{z\overline{z}}$.

Méthode - Résoudre une équation du premier degré

$(1+\mathrm{i})z - 3 = 2\mathrm{i} \iff z = \dfrac{3+2\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} = \dfrac{(3+2\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{2} = \dfrac{5-\mathrm{i}}{2}$.

Pour une équation contenant z et $\overline{z}$, on pose $z = x+\mathrm{i}y$ et on identifie parties réelle et imaginaire.

III Formule du binôme de Newton

Propriété

Pour tous complexes a et b et tout entier naturel n :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}b^k = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + b^n.$$

Démonstration par récurrence sur n, à l'aide de la relation de Pascal.

Exemple

$(1+\mathrm{i})^4 = 1+4\mathrm{i}+6\mathrm{i}^2+4\mathrm{i}^3+\mathrm{i}^4 = 1+4\mathrm{i}-6-4\mathrm{i}+1 = -4$.

Puissances de i : $\mathrm{i}^2 = -1$, $\mathrm{i}^3 = -\mathrm{i}$, $\mathrm{i}^4 = 1$, puis le cycle recommence : $\mathrm{i}^{4k+r} = \mathrm{i}^r$.