Nombres complexes : point de vue géométrique

Prélude - Historique et contexte

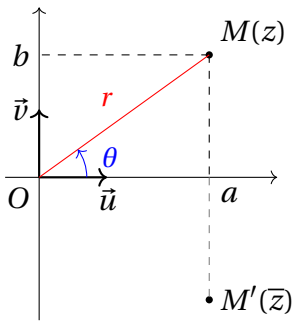
Vers 1800, le Norvégien Caspar Wessel, le Suisse Jean-Robert Argand puis Gauss proposent de représenter un nombre complexe par un point du plan. Les nombres « imaginaires » deviennent alors concrets : additionner revient à translater, multiplier revient à agrandir et tourner. Cette représentation permet de traiter des problèmes de géométrie par le calcul.

I Plan complexe

Définition

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\,\vec{u},\vec{v})$.

- Au complexe $z = a+\mathrm{i}b$ on associe le point $M(a\,;\,b)$, appelé **image** de z ; z est l'**affixe** de M, notée z_M.
- De même, z est l'affixe du vecteur $\vec{w}(a\,;\,b)$.
- L'axe des abscisses est l'axe des réels, l'axe des ordonnées celui des imaginaires purs.



Propriété

- $z_{\vec{AB}} = z_B - z_A$; $z_{\vec{w}+\vec{w'}} = z_{\vec{w}} + z_{\vec{w'}}$; $z_{k\vec{w}} = k\,z_{\vec{w}}$ (k réel).
- Le milieu I de $[AB]$ a pour affixe $\dfrac{z_A + z_B}{2}$.
- Les points d'affixes z et $\overline{z}$ sont symétriques par rapport à l'axe des réels ; z et $-z$ par rapport à O.

II Module

Définition

Le **module** de $z = a+\mathrm{i}b$ est le réel positif $|z| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{z\overline{z}}$. Si M est l'image de z, $|z| = OM$.

Propriété

Pour tous complexes z, z' et tout entier naturel n :

$$|\overline{z}| = |z| \qquad |zz'| = |z|\,|z'| \qquad |z^n| = |z|^n \qquad \left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}\ (z' \neq 0) \qquad |z+z'| \leqslant |z| + |z'|.$$

La dernière est l'**inégalité triangulaire**. Démonstration de la deuxième : $|zz'|^2 = zz'\overline{zz'} = z\overline{z}\,z'\overline{z'} = |z|^2|z'|^2$.

Propriété - Distance

$AB = |z_B - z_A|$. L'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z - z_A| = r$ ($r > 0$) est le cercle de centre A et de rayon r ; l'ensemble des points tels que $|z - z_A| = |z - z_B|$ est la médiatrice de $[AB]$.

Exemple

$|3-4\mathrm{i}| = 5$; $\left|\dfrac{(1+\mathrm{i})^6}{3-4\mathrm{i}}\right| = \dfrac{\sqrt{2}^6}{5} = \dfrac{8}{5}$.

Définition - Ensemble $\mathbb{U}$

L'ensemble des complexes de module 1 est noté $\mathbb{U}$. Ses images forment le cercle trigonométrique. $\mathbb{U}$ est stable par produit et par passage à l'inverse.

III Argument et forme trigonométrique

Définition

Soit z un complexe non nul d'image M. Un **argument** de z est une mesure en radians de l'angle orienté $\left(\vec{u}, \vec{OM}\right)$. On note $\arg(z) = \theta\ [2\pi]$; les arguments de z sont les réels $\theta + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Propriété - Forme trigonométrique

Tout complexe non nul z de module r et d'argument θ s'écrit

$$z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) \quad \text{avec} \quad \cos\theta = \frac{a}{r}, \quad \sin\theta = \frac{b}{r}.$$

Deux complexes non nuls sont égaux si et seulement s'ils ont même module et même argument modulo 2π.

Méthode - Passer à la forme trigonométrique

$z = 1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$: $r = \sqrt{1+3} = 2$, $\cos\theta = \frac{1}{2}$ et $\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, donc $\theta = -\frac{\pi}{3}$: $z = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$.

Propriété

$\arg(\overline{z}) = -\arg(z)$; $\arg(-z) = \arg(z) + \pi$; z réel strictement positif $\iff \arg z = 0\ [2\pi]$; z imaginaire pur non nul $\iff \arg z = \frac{\pi}{2}\ [\pi]$.