Nombres complexes : forme exponentielle

Prélude - Historique et contexte

En 1748, Leonhard Euler publie la formule $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$, qui relie l'exponentielle et la trigonométrie. Le cas $\theta = \pi$ donne la célèbre identité $e^{i\pi} + 1 = 0$, qui réunit cinq constantes fondamentales. Quelques années plus tôt, Abraham de Moivre avait découvert la formule qui porte son nom. La forme exponentielle transforme les produits en sommes d'angles : elle est utilisée en électricité (courant alternatif) et en traitement du signal.

I Formules trigonométriques

Propriété - Formules d'addition

Pour tous réels a et b :

$$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b \qquad \sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b$$

$$\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b \qquad \sin(a-b) = \sin a\cos b - \cos a\sin b$$

Propriété - Formules de duplication

$$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a \qquad \sin(2a) = 2\sin a\cos a$$

Exemple

$$\cos\frac{\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}.$$

II Forme exponentielle

Définition - Notation d'Euler

Pour tout réel θ, on note $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$. C'est le nombre complexe de module 1 et d'argument θ.
Exemples : $e^{i0} = 1$, $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$, $e^{i\pi} = -1$.

Propriété - Forme exponentielle

Tout nombre complexe non nul z de module r et d'argument θ s'écrit $z = re^{i\theta}$.

Propriété - Règles de calcul

Pour tous réels θ et θ' et tout entier n :

$$e^{i\theta}\times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')} \qquad \frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \overline{e^{i\theta}} \qquad \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')} \qquad \left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$$

Démonstration du produit : on développe $(\cos\theta+i\sin\theta)(\cos\theta'+i\sin\theta')$ et on reconnaît les formules d'addition.

Propriété - Arguments d'un produit, d'un quotient

Pour z et z' non nuls et n entier :

$$\arg(zz') \equiv \arg z + \arg z' \ [2\pi] \qquad \arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv \arg z - \arg z' \ [2\pi] \qquad \arg(z^n) \equiv n \arg z \ [2\pi]$$

Exemple

$z = 1 + \mathrm{i} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$, donc $z^8 = (\sqrt{2})^8 \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi} = 16$.

III Formules de Moivre et d'Euler

Propriété - Formule de Moivre

Pour tout réel θ et tout entier n : $(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + \mathrm{i}\sin(n\theta)$.

Propriété - Formules d'Euler

Pour tout réel θ : $\cos\theta = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{i}}$.

Méthode - Linéariser $\cos^2\theta$

$$\cos^2\theta = \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2}\right)^2 = \frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta} + 2 + \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\theta}}{4} = \frac{1 + \cos(2\theta)}{2}.$$

Méthode - Exprimer $\cos(3\theta)$ en fonction de $\cos\theta$

Avec Moivre, $\cos(3\theta)$ est la partie réelle de $(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^3$, soit $\cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$.

Propriété - Interprétation géométrique

Si A, B, C sont d'affixes a, b, c avec $A \neq B$ et $A \neq C$: $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv \arg\left(\dfrac{c-a}{b-a}\right) \ [2\pi]$.