Graphes : chaînes de Markov

Prélude - Historique et contexte

Au début du XX^{e} siècle, le mathématicien russe Andreï Markov étudie la succession des voyelles et des consonnes dans le poème *Eugène Onéguine* de Pouchkine : la nature d'une lettre dépend de la précédente, mais pas de tout le passé. Il crée ainsi les chaînes qui portent son nom. Elles servent aujourd'hui en météorologie, en génétique, en finance, et l'algorithme PageRank de Google classe les pages web à l'aide d'une chaîne de Markov.

I Graphe probabiliste et chaîne de Markov

Définition - Graphe probabiliste

Un **graphe probabiliste** est un graphe orienté pondéré dans lequel les poids sont des réels de $[0\,;\,1]$ et la somme des poids des arcs issus d'un même sommet vaut 1.

Définition - Chaîne de Markov

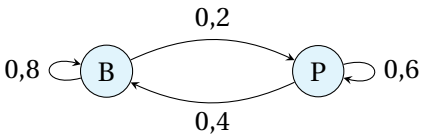
Une suite de variables aléatoires (X_n) à valeurs dans un ensemble d'états E est une **chaîne de Markov homogène** si la probabilité de passer de l'état i à l'état j ne dépend ni de n ni des états antérieurs à X_n :

$$p_{ij} = P_{(X_n=i)}(X_{n+1} = j).$$

On la représente par un graphe probabiliste : un sommet par état, un arc de i vers j de poids p_{ij}.

Exemple

Chaque jour, il fait beau (B) ou il pleut (P). S'il fait beau, il fait beau le lendemain avec probabilité 0,8 ; s'il pleut, il pleut le lendemain avec probabilité 0,6.



II Matrice de transition et distributions

Définition - Matrice de transition

La **matrice de transition** est $P = (p_{ij})$: le coefficient ligne i, colonne j est la probabilité de passer de i à j. La somme de chaque ligne vaut 1.

Dans l'exemple (ordre B, P) : $P = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix}$.

Définition - Distribution

La **distribution** au rang n est la matrice ligne $\pi_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 1) & P(X_n = 2) & \dots \end{pmatrix}$.

Propriété

Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\pi_{n+1} = \pi_n P$, donc $\pi_n = \pi_0 P^n$.
Le coefficient $(i\,;\,j)$ de P^n est la probabilité de passer de l'état i à l'état j en n étapes.
Démonstration de la relation : formule des probabilités totales, $P(X_{n+1} = j) = \sum_i P(X_n = i)\, p_{ij}$.

Exemple

S'il fait beau lundi, $\pi_0 = (1 \;\; 0)$, $\pi_1 = (0{,}8 \;\; 0{,}2)$, $\pi_2 = \pi_1 P = (0{,}72 \;\; 0{,}28)$.

III Distribution invariante

Définition

Une distribution π est **invariante** (ou stationnaire) si $\pi P = \pi$.

Méthode - Chercher une distribution invariante

On pose $\pi = (x \;\; y)$ avec $x + y = 1$ et on résout $\pi P = \pi$.

Exemple : $0{,}8x + 0{,}4y = x$ donne $0{,}4y = 0{,}2x$, soit $x = 2y$; avec $x + y = 1$: $\pi = \left(\frac{2}{3} \;\; \frac{1}{3}\right)$.

Propriété - Cas d'une chaîne à deux états (admis)

Si $P = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$ avec $0 < a + b < 2$, la suite (π_n) converge vers l'unique distribution invariante $\left(\frac{b}{a+b} \;\; \frac{a}{a+b}\right)$, quelle que soit π_0.

Exemple - Interprétation

À long terme, il fait beau environ deux jours sur trois, quel que soit le temps du premier jour.