Matrices et calcul matriciel

Prélude - Historique et contexte

Des tableaux de nombres servaient déjà à résoudre des systèmes d'équations dans le traité chinois des *Neuf chapitres* (vers le I^{er} siècle). Le mot « matrice » est introduit par Sylvester en 1850 et Cayley en définit le produit en 1858. Les matrices sont partout aujourd'hui : images numériques (tableaux de pixels), moteurs de recherche, graphisme 3D, réseaux de neurones.

I Matrices et opérations

Définition

Une **matrice** de taille $n \times p$ est un tableau de nombres réels à n lignes et p colonnes. Le coefficient de la ligne i et de la colonne j est noté a_{ij}.

- Si $n = p$, la matrice est **carrée** d'ordre n. Une matrice $1 \times p$ est une **matrice ligne**, une matrice $n \times 1$ une **matrice colonne**.
- La matrice **identité** I_n est la matrice carrée d'ordre n ayant des 1 sur la diagonale et des 0 ailleurs. Une matrice **diagonale** n'a de coefficients non nuls que sur sa diagonale.

Définition - Somme et produit par un réel

Pour deux matrices A et B de même taille et un réel k, $A+B$ et kA s'obtiennent en additionnant terme à terme et en multipliant chaque coefficient par k.

Définition - Produit de matrices

Soit A de taille $n \times p$ et B de taille $p \times q$. Le produit AB est la matrice $n \times q$ dont le coefficient c_{ij} est obtenu en multipliant la ligne i de A par la colonne j de B :

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj}.$$

Exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times 2+2\times 1 & 1\times 0+2\times 4 \\ 3\times 2-1\times 1 & 3\times 0-1\times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}.$$

Propriété

Le produit est associatif $(A(BC) = (AB)C)$ et distributif sur l'addition ; $AI_n = I_nA = A$.
Attention : en général $AB \neq BA$; et $AB = 0$ n'implique pas $A = 0$ ou $B = 0$.

II Puissances et inverse

Définition - Puissance

Pour A carrée et $n \in \mathbb{N}^*$: $A^n = A \times A \times \cdots \times A$ (n facteurs), et $A^0 = I$.
Si D est diagonale, D^n s'obtient en élevant chaque coefficient diagonal à la puissance n.

Définition - Matrice inversible

Une matrice carrée A d'ordre n est **inversible** s'il existe une matrice B telle que $AB = BA = I_n$. B est alors unique ; c'est l'**inverse** de A, noté A^{-1}.

Propriété - Cas d'une matrice 2×2

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si son **déterminant** $\det(A) = ad - bc$ est non nul, et alors

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Exemple

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$: $\det A = 6 - 5 = 1$, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$. Pour des matrices plus grandes, on utilise la calculatrice.

III Systèmes linéaires et modélisation

Propriété - Écriture matricielle d'un système

Le système $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 5x + 3y = 7 \end{cases}$ s'écrit $AX = B$ avec $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Si A est inversible, le système a une unique solution : $X = A^{-1}B$. Ici $X = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \end{pmatrix}$.

Méthode - Modéliser par une matrice

Une boulangerie vend des croissants à 1,10 € et des pains au chocolat à 1,30 €. Lundi : 40 croissants et 30 pains ; mardi : 25 croissants et 45 pains. Les recettes s'obtiennent par

$$\begin{pmatrix} 40 & 30 \\ 25 & 45 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1,10 \\ 1,30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 83 \\ 86 \end{pmatrix}.$$

Méthode - Calculer une puissance par récurrence

Si $A = PDP^{-1}$ avec D diagonale, alors pour tout $n \geqslant 1$, $A^n = PD^nP^{-1}$ (démonstration par récurrence : $A^{n+1} = PD^nP^{-1}PDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$).