Suites de matrices

Prélude - Historique et contexte

En 1202, Fibonacci étudie la croissance d'une population de lapins ; on sait aujourd'hui écrire ce problème sous forme matricielle. Au XX^{e} siècle, le démographe Patrick Leslie (1945) modélise l'évolution d'une population par classes d'âge à l'aide d'une matrice : chaque année, le vecteur des effectifs est multiplié par cette matrice. Ces suites de matrices servent en écologie, en économie (modèle de Leontief) et en informatique (classement des pages web).

I Suites de matrices colonnes

Définition

Une **suite de matrices colonnes** (U_n) associe à chaque entier naturel n une matrice colonne $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ (ou à trois lignes). Elle permet d'étudier simultanément plusieurs suites numériques.

Exemple - Suite explicite

$U_n = \begin{pmatrix} 2^n \\ 3n+1 \end{pmatrix} : U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, U_3 = \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \end{pmatrix}$.

Définition - Convergence

(U_n) **converge** vers la matrice colonne L si chacune des suites coefficients converge vers le coefficient correspondant de L.

II Récurrence $U_{n+1} = AU_n$

Propriété

Si $U_{n+1} = AU_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, où A est une matrice carrée, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$: $U_n = A^n U_0$.
Démonstration par récurrence : $U_0 = A^0 U_0$ et si $U_n = A^n U_0$, alors $U_{n+1} = A\,A^n U_0 = A^{n+1} U_0$.

Méthode - Traduire un système de suites

Les suites définies par $\begin{cases} a_{n+1} = 0{,}8a_n + 0{,}3b_n \\ b_{n+1} = 0{,}2a_n + 0{,}7b_n \end{cases}$ vérifient $U_{n+1} = AU_n$ avec $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}7 \end{pmatrix}$.

Méthode - Calculer A^n par diagonalisation

S'il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $A = PDP^{-1}$, alors $A^n = PD^nP^{-1}$ (récurrence), et D^n s'obtient en élevant les coefficients diagonaux à la puissance n.
La matrice P est en général donnée par l'énoncé.

III Récurrence $U_{n+1} = AU_n + B$

Propriété - Matrice colonne invariante

On suppose $U_{n+1} = AU_n + B$. Si une matrice colonne C vérifie $C = AC + B$, alors la suite $V_n = U_n - C$ vérifie $V_{n+1} = AV_n$.
On en déduit $V_n = A^n V_0$, puis $U_n = A^n(U_0 - C) + C$.

Méthode - Trouver C

Si $I - A$ est inversible : $C = AC + B \iff (I - A)C = B \iff C = (I - A)^{-1}B$.

Propriété - Limite

Si (A^n) converge vers la matrice nulle, alors (U_n) converge vers C.

Exemple

$U_{n+1} = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0{,}2 \end{pmatrix} U_n + \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} : C = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ convient ($0{,}5\times 2+1 = 2$; $0{,}2\times 5+4 = 5$). Comme $A^n = \begin{pmatrix} 0{,}5^n & 0 \\ 0 & 0{,}2^n \end{pmatrix}$ tend vers la matrice nulle, (U_n) converge vers C.