

Nombres complexes

Prélude - Historique et contexte

Au XVI^e siècle, les algébristes italiens Tartaglia, Cardan et Bombelli résolvent les équations du troisième degré et rencontrent des racines carrées de nombres négatifs, qu'ils utilisent « sans les comprendre ». Descartes les qualifie d'« imaginaires ». Euler introduit la notation i avec $i^2 = -1$ et la célèbre formule $e^{i\pi} + 1 = 0$. Au XIX^e siècle, Argand et Gauss les représentent dans un plan. Aujourd'hui, les ingénieurs électriciens utilisent les complexes pour étudier les circuits en régime sinusoïdal (impédances), et ils sont omniprésents en traitement du signal.

I Forme algébrique

Définition

Il existe un ensemble $\mathbb{C}$ de nombres, les **nombres complexes**, contenant $\mathbb{R}$, muni d'une addition et d'une multiplication qui prolongent celles de $\mathbb{R}$, et contenant un nombre i tel que $i^2 = -1$.

Tout complexe s'écrit de manière unique $z = a + bi$ avec a, b réels : $a = \operatorname{Re}(z)$ est la **partie réelle**, $b = \operatorname{Im}(z)$ la **partie imaginaire**.

Le **conjugué** de $z = a + bi$ est $\bar{z} = a - bi$; on a $z\bar{z} = a^2 + b^2$.

Exemple

$$(2 + 3i)(1 - i) = 2 - 2i + 3i - 3i^2 = 5 + i. \quad \frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{(1+i)(1-i)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i.$$

Propriété - Équations

- Une équation du premier degré $az + b = 0$ ($a \neq 0$) se résout comme dans $\mathbb{R}$: $z = -\frac{b}{a}$ (en utilisant le conjugué pour écrire le quotient sous forme algébrique).
- L'équation $z^2 = a$, a réel : si $a \geq 0$, $z = \pm\sqrt{a}$; si $a < 0$, $z = i\sqrt{-a}$ ou $z = -i\sqrt{-a}$.

Exemple : $z^2 = -9 \iff z = 3i$ ou $z = -3i$. $(1+i)z = 3-i \iff z = \frac{(3-i)(1-i)}{2} = \frac{2-4i}{2} = 1-2i$.

II Module, argument et forme exponentielle

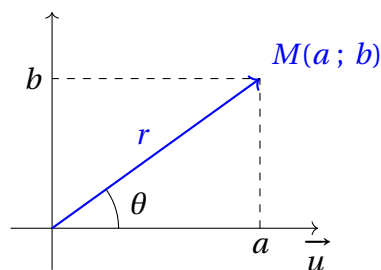
Définition

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, le point $M(a; b)$ est l'**image** de $z = a + bi$.

- Le **module** de z est $|z| = OM = \sqrt{a^2 + b^2}$.
- Un **argument** de $z \neq 0$ est une mesure θ de l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$: $\cos \theta = \frac{a}{|z|}$ et $\sin \theta = \frac{b}{|z|}$.
- On note $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ et

$$z = re^{i\theta} \quad (r = |z|)$$

est la **forme exponentielle** de z .



Exemple

$z = 1 + i\sqrt{3} : |z| = \sqrt{1+3} = 2, \cos \theta = \frac{1}{2}, \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ donc $\theta = \frac{\pi}{3} : z = 2e^{i\pi/3}$.
 Inversement, $3e^{-i\pi/2} = 3(\cos(-\frac{\pi}{2}) + i\sin(-\frac{\pi}{2})) = -3i$.

Propriété

$$re^{i\theta} \times r'e^{i\theta'} = rr'e^{i(\theta+\theta')} \quad \frac{re^{i\theta}}{r'e^{i\theta'}} = \frac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')} \quad (re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}.$$

Les modules se multiplient, les arguments s'additionnent.

III Formules d'addition et signaux sinusoidaux

Propriété - Formules d'addition

$$\begin{aligned} \cos(a+b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b & \sin(a+b) &= \sin a \cos b + \cos a \sin b \\ \cos^2 \theta &= \frac{1 + \cos 2\theta}{2} & \sin^2 \theta &= \frac{1 - \cos 2\theta}{2}. \end{aligned}$$

Méthode - Écrire $a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$ sous la forme $A\cos(\omega t + \varphi)$

On cherche $A > 0$ et φ tels que $A\cos \varphi = a$ et $A\sin \varphi = -b$: ce sont le module et un argument du complexe $a - bi$. Ainsi $A = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Exemple : $u(t) = \cos(100\pi t) - \sqrt{3}\sin(100\pi t)$. Le complexe $1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\pi/3}$ donne

$$u(t) = 2\cos\left(100\pi t + \frac{\pi}{3}\right).$$

Vérification : $2\cos(100\pi t)\cos\frac{\pi}{3} - 2\sin(100\pi t)\sin\frac{\pi}{3} = \cos(100\pi t) - \sqrt{3}\sin(100\pi t)$.

IV Interprétation géométrique

Propriété

- $z \mapsto z + b$ (b complexe) : **translation** de vecteur d'affixe b .
- $z \mapsto kz$ (k réel non nul) : **homothétie** de centre O et de rapport k .
- $z \mapsto e^{i\theta}z$: **rotation** de centre O et d'angle θ .
- $z \mapsto az$ avec $a = re^{i\theta}$: composée d'une rotation d'angle θ et d'une homothétie de rapport r .

Exemple

Multiplier par $i = e^{i\pi/2}$ fait tourner d'un quart de tour : l'image de $A(3 ; 1)$ est A' d'affixe $i(3 + i) = -1 + 3i$.

