

Composition de fonctions

Prélude - Historique et contexte

Beaucoup de grandeurs physiques s'obtiennent en enchaînant plusieurs transformations : la tension aux bornes d'un condensateur $u(t) = U_0 e^{-t/\tau}$ est l'exponentielle d'une fonction affine, une tension alternative $\cos(\omega t + \varphi)$ est un cosinus d'une fonction affine. Leibniz énonce dès la fin du XVII^e siècle la « règle de la chaîne » qui permet de dériver de telles fonctions. On dit qu'on **compose** des fonctions : on applique d'abord l'une, puis l'autre.

I Composée de deux fonctions

Définition

Soient u une fonction définie sur I et g une fonction définie sur un intervalle contenant les valeurs $u(x)$. La **composée** de u suivie de g est la fonction f définie par $f(x) = g(u(x))$, notée $g \circ u$.

$$x \xrightarrow{u} u(x) \xrightarrow{g} g(u(x))$$

Exemples

$f(x)$	$u(x)$ (on calcule d'abord)	$g(X)$ (puis on applique)
$(3x-1)^4$	$3x-1$	X^4
e^{-2x+5}	$-2x+5$	e^X
$\cos(100\pi t + \frac{\pi}{6})$	$100\pi t + \frac{\pi}{6}$	$\cos X$
$\sqrt{x^2+1}$	x^2+1	$\sqrt{X}$
$\ln(1+x^2)$	$1+x^2$	$\ln X$

Remarque

L'ordre compte : si $u(x) = x+1$ et $g(X) = X^2$, alors $g(u(x)) = (x+1)^2$ mais $u(g(x)) = x^2+1$.

II Dérivée d'une composée

Propriété

Si u est dérivable sur I et g dérivable sur un intervalle contenant $u(I)$, alors $(g(u(x)))' = u'(x) \times g'(u(x))$.

Propriété - Formules usuelles

f	u^n	e^u	$\cos(u)$	$\sin(u)$
f'	$nu' u^{n-1}$	$u'e^u$	$-u' \sin(u)$	$u' \cos(u)$

$f(ax+b)$	$\ln(u) \ (u > 0)$
$af'(ax+b)$	$\frac{u'}{u}$

Exemples

- $f(x) = (3x - 1)^4 : f'(x) = 4 \times 3 \times (3x - 1)^3 = 12(3x - 1)^3$.
- $f(x) = e^{x^2} : f'(x) = 2xe^{x^2}$.
- $u(t) = 230\sqrt{2} \cos(100\pi t) : u'(t) = -230\sqrt{2} \times 100\pi \sin(100\pi t)$.
- $f(x) = \ln(x^2 + 1) : f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$.

III Primitives de fonctions composées

Propriété

En lisant les formules de dérivation « à l'envers » :

Fonction	Une primitive
$f(ax + b)$	$\frac{1}{a}F(ax + b)$ (F primitive de f)
$u'u^n$ ($n \neq -1$)	$\frac{u^{n+1}}{n+1}$
$u'e^u$	e^u
$u' \cos(u)$	$\sin(u)$
$u' \sin(u)$	$-\cos(u)$
$\frac{u'}{u}$ ($u > 0$)	$\ln(u)$

Méthode

On repère u , on calcule u' et on « ajuste » la constante multiplicative.

Exemples

- $f(x) = (2x + 1)^3 : u = 2x + 1, u' = 2. f = \frac{1}{2}u'u^3$, une primitive est $F(x) = \frac{1}{2} \times \frac{(2x+1)^4}{4} = \frac{(2x+1)^4}{8}$.
- $f(x) = xe^{x^2} : u = x^2, u' = 2x. f = \frac{1}{2}u'e^u$ donc $F(x) = \frac{1}{2}e^{x^2}$.
- $f(t) = \sin(3t) : F(t) = -\frac{1}{3}\cos(3t)$.
- $f(x) = \frac{x}{x^2 + 4} : f = \frac{1}{2}\frac{u'}{u}$ avec $u = x^2 + 4 > 0$, donc $F(x) = \frac{1}{2}\ln(x^2 + 4)$.

Exemple - Linéarisation

Pour trouver une primitive de $\cos^2 t$, on linéarise : $\cos^2 t = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2t)$, donc une primitive est $\frac{t}{2} + \frac{1}{4}\sin(2t)$.

Application : la puissance moyenne dissipée dans une résistance R parcourue par $i(t) = I_{\max} \cos(\omega t)$ est $\frac{RI_{\max}^2}{2}$.