

Équations différentielles

Prélude - Historique et contexte

À la fin du XVII^e siècle, Newton et Leibniz formulent les lois de la physique sous forme d'équations reliant une fonction et ses dérivées : les **équations différentielles**. Newton modélise ainsi le mouvement des planètes et le refroidissement d'un corps. Leonhard Euler invente en 1768 une méthode pas à pas pour en calculer des solutions approchées. Aujourd'hui, elles décrivent la charge d'un condensateur, la vitesse d'un mobile freiné, la décroissance radioactive ou l'évolution d'une température.

I Généralités

Définition

Une **équation différentielle** est une équation dont l'inconnue est une fonction y et qui fait intervenir sa dérivée y' . Une **solution** sur un intervalle I est une fonction dérivable f vérifiant l'égalité pour tout x de I .

Méthode - Vérifier qu'une fonction est solution

On calcule $f'(x)$, puis on remplace y par $f(x)$ et y' par $f'(x)$ dans l'équation.

Exemple : $f(x) = 3e^{2x} - 1$ est-elle solution de $y' = 2y + 2$?

$f'(x) = 6e^{2x}$ et $2f(x) + 2 = 6e^{2x} - 2 + 2 = 6e^{2x}$: oui.

II L'équation $y' = ay$

Propriété

Soit a un réel. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $y' = ay$ sont les fonctions $x \mapsto ke^{ax}$, k réel.

Pour une condition initiale $y(x_0) = y_0$ donnée, il existe une unique solution.

Exemple - Décroissance radioactive

Le nombre de noyaux $N(t)$ vérifie $N' = -\lambda N$. Donc $N(t) = ke^{-\lambda t}$ et $N(0) = N_0$ donne $k = N_0$: $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$.

III L'équation $y' = ay + b$

Propriété

Soient $a \neq 0$ et b deux réels. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de $y' = ay + b$ sont les fonctions

$$x \mapsto ke^{ax} - \frac{b}{a}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

La fonction constante $x \mapsto -\frac{b}{a}$ est la **solution particulière constante**.

Méthode - Solution avec condition initiale

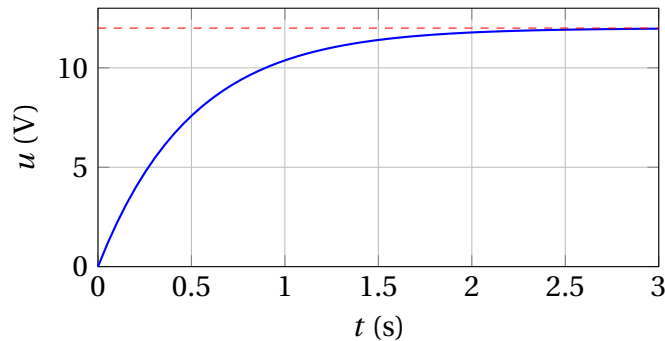
1. On écrit l'équation sous la forme $y' = ay + b$ et on identifie a et b .
2. On écrit la forme générale $y(x) = ke^{ax} - \frac{b}{a}$.
3. On détermine k grâce à la condition initiale.

Exemple - Charge d'un condensateur

Dans un circuit RC alimenté par une tension $E = 12$ V, la tension u aux bornes du condensateur vérifie $RC u' + u = E$ avec $RC = 0,5$ s et $u(0) = 0$.

$$0,5u' + u = 12 \iff u' = -2u + 24 : a = -2, b = 24, -\frac{b}{a} = 12.$$

$$u(t) = ke^{-2t} + 12 \text{ et } u(0) = 0 \text{ donne } k = -12 : \boxed{u(t) = 12(1 - e^{-2t})}.$$



IV Méthode d'Euler

Méthode

Pour approcher la solution de $y' = y$, $y(0) = 1$ (c'est-à-dire la fonction exponentielle), on avance par petits pas h en remplaçant la courbe par sa tangente :

$$y(x+h) \approx y(x) + h y'(x) = y(x) + h y(x) = (1+h) y(x).$$

```
h = 0.1
x, y = 0, 1
while x < 1 - 1e-9:
    y = y + h * y      # y' = y
    x = x + h
print(y)  # environ 2.5937, proche de e = 2.7183
```

Plus le pas h est petit, meilleure est l'approximation : avec $h = 0,001$ on obtient environ 2,7169.

Exemple - Loi de refroidissement de Newton

Un objet à 90°C refroidit dans une pièce à 20°C : $\theta' = -0,05(\theta - 20)$, t en minutes.

$$\theta' = -0,05\theta + 1 : a = -0,05, b = 1, -\frac{b}{a} = 20. \theta(t) = ke^{-0,05t} + 20 \text{ et } \theta(0) = 90 \text{ donne } k = 70.$$

$$\theta(t) = 70e^{-0,05t} + 20. \text{ Au bout de 30 min : } \theta(30) = 70e^{-1,5} + 20 \approx 35,6^\circ\text{C}.$$