

Fonctions exponentielles

Prélude - Historique et contexte

Le nombre $e \approx 2,718$ apparaît en 1683 chez Jacques Bernoulli qui étudie des intérêts composés de plus en plus fréquents : $(1 + \frac{1}{n})^n$ se rapproche de e lorsque n devient grand. Leonhard Euler lui donne son nom et montre son importance. La fonction exponentielle $x \mapsto e^x$ est la seule fonction égale à sa dérivée et valant 1 en 0 : elle modélise la charge d'un condensateur, le refroidissement d'un corps, la décroissance radioactive...

I Fonctions $x \mapsto a^x$ et nombre e

Définition

Pour $a > 0$ et k un réel, la fonction $x \mapsto k \times a^x$ est définie sur $\mathbb{R}$.

a est appelé la base. C'est l'équivalent de la raison d'une suite géométrique.

k est l'ordonnée à l'origine ($k = f(0)$). C'est l'équivalent du u_0 d'une suite géométrique.

Remarque

Les fonctions exponentielles conservent le même signe. Ce signe dépend donc uniquement de k .

Si $1 < a$ cette fonction s'éloigne de 0. Elle est donc croissante si $k > 0$ et décroissante sinon.

Si $a = 1$ cette fonction est constante.

Si $0 < a < 1$ cette fonction se rapproche de 0. Elle est donc décroissante si $k > 0$ et croissante sinon.

Définition - Le nombre e

Parmi toutes les fonctions $x \mapsto a^x$, il en existe une seule dont la tangente en 0 a pour coefficient directeur 1. Sa base est notée e ($e \approx 2,71828$). La fonction $x \mapsto e^x$ est la **fonction exponentielle**, notée aussi $\exp$.

II Propriétés algébriques

Propriétés algébriques

Pour tous réels a, b :

$e^0 = 1$	$e^{a+b} = e^a e^b$	$e^{-a} = \frac{1}{e^a}$	$e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$	$(e^a)^b = e^{ab}$
-----------	---------------------	--------------------------	-----------------------------	--------------------

De plus $e^x > 0$ pour tout réel x .

Exemple

$$A = \frac{e^3 \times e^{-1}}{e^5} = e^{3-1-5} = e^{-3} \quad B = (e^{2x})^3 \times e^{-x} = e^{5x}.$$

Remarque

Ces formules sont valides pour n'importe quelle base réelle positive, pas uniquement avec e .

III Dérivées et variations

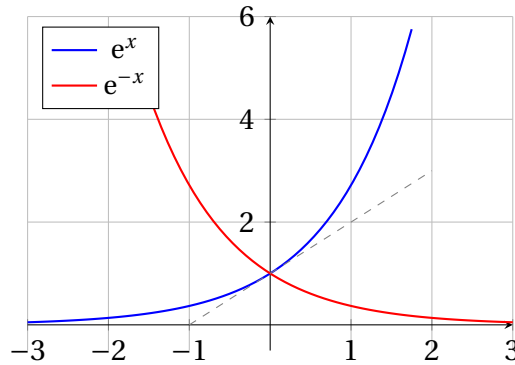
Propriétés

La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(e^x)' = e^x$.

Plus généralement, pour u une fonction : $(e^u)' = u' e^u$.

Comme $e^x > 0$, la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

La fonction $x \mapsto e^{kx}$ est croissante si $k > 0$ et décroissante si $k < 0$.



En pointillés : la tangente $y = x + 1$ en 0.

Exemple

$$f(x) = (2x - 1)e^x.$$

On dérive un produit $(uv)' = u'v + uv'$:

$$f'(x) = 2e^x + (2x - 1)e^x = (2x + 1)e^x.$$

Comme $e^x > 0$, $f'(x)$ est du signe de $2x + 1$: f est décroissante sur $]-\infty; -\frac{1}{2}]$ et croissante sur $[-\frac{1}{2}; +\infty[$.

Le minimum de f est $f(-\frac{1}{2}) = -2e^{-1/2} \approx -1,21$.

IV Limites

Propriété

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0.$$

La droite $y = 0$ est asymptote horizontale à la courbe de $\exp$ en $-\infty$.

Pour tout entier $n \geq 1$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$.

« L'exponentielle l'emporte sur les puissances de x . »

Exemple

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3 - 5e^{-2x}) = 3$ car $e^{-2x} \rightarrow 0$: la droite $y = 3$ est asymptote horizontale.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x^2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(\frac{e^x}{x^2} - 1 \right) = +\infty$.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x - 1)e^x = 0$ (croissances comparées).
- La tension aux bornes d'un condensateur est $u(t) = 12(1 - e^{-t/\tau})$ avec $\tau = 0,5$ s.
 $u'(t) = \frac{12}{\tau} e^{-t/\tau} > 0$: la tension augmente. $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = 12$ V : elle se stabilise à 12 V.
À $t = 5\tau = 2,5$ s, $u \approx 12(1 - e^{-5}) \approx 11,92$ V : le condensateur est chargé à plus de 99 %.