

Intégration

Prélude - Historique et contexte

Archimède (III^e siècle av. J.-C.) calcule l'aire sous une parabole en l'encadrant par des sommes de rectangles de plus en plus fins. Au XVII^e siècle, Newton et Leibniz découvrent indépendamment que le calcul d'aires est l'opération inverse de la dérivation : c'est le **théorème fondamental de l'analyse**. Leibniz invente la notation $\int$, un S allongé pour « somme ». En sciences de l'ingénieur, l'intégrale permet de calculer une énergie à partir d'une puissance, une distance à partir d'une vitesse, ou la valeur moyenne d'un signal.

I Primitives

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I . Une **primitive** de f sur I est une fonction F dérivable sur I telle que $F' = f$.

Si F est une primitive de f , toutes les primitives de f sont les fonctions $F + k$, k constante réelle.

Propriété - Primitives usuelles

Fonction f	Une primitive F	Intervalle
a (constante)	ax	$\mathbb{R}$
x^n ($n \neq -1$ entier)	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$ (ou $]0; +\infty[$ si $n < 0$)
$\frac{1}{x}$	$\ln(x)$	$]0; +\infty[$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
e^{ax} ($a \neq 0$)	$\frac{1}{a}e^{ax}$	$\mathbb{R}$
$\cos(\omega x)$	$\frac{1}{\omega} \sin(\omega x)$	$\mathbb{R}$
$\sin(\omega x)$	$-\frac{1}{\omega} \cos(\omega x)$	$\mathbb{R}$

Une primitive de $f + g$ est $F + G$; une primitive de kf est kF .

Exemple

$$f(x) = 6x^2 - 4x + 3 : F(x) = 2x^3 - 2x^2 + 3x. \quad g(x) = 5e^{-2x} : G(x) = -\frac{5}{2}e^{-2x}.$$

II Intégrale et aire

Définition

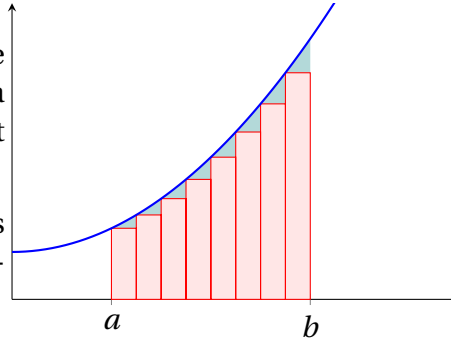
Soit f continue sur $[a ; b]$ et F une primitive de f . L'**intégrale** de f entre a et b est :

$$\int_a^b f(x) dx = \left[F(x) \right]_a^b = F(b) - F(a)$$

Propriété - Interprétation graphique

Si f est positive sur $[a ; b]$, $\int_a^b f(x) dx$ est l'aire (en unités d'aire) du domaine compris entre la courbe, l'axe des abscisses et les droites $x = a$ et $x = b$.

Elle est la limite des sommes de rectangles $\sum f(x_i) \Delta x_i$ lorsque la largeur Δx_i tend vers 0 (méthode des rectangles).



Exemple

$$\int_1^3 (0,4x^2 + 0,8) dx = \left[\frac{0,4}{3} x^3 + 0,8x \right]_1^3 = (3,6 + 2,4) - \left(\frac{0,4}{3} + 0,8 \right) = \frac{76}{15} \approx 5,07 \text{ u.a.}$$

Propriétés

- **Linéarité** : $\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g$ et $\int_a^b kf = k \int_a^b f$.
- **Relation de Chasles** : $\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f$.
- **Positivité** : si $f \geq 0$ sur $[a ; b]$ ($a \leq b$) alors $\int_a^b f \geq 0$.
- **Croissance** : si $f \leq g$ sur $[a ; b]$ alors $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.

Propriété - Aire entre deux courbes

Si $f \geq g$ sur $[a ; b]$, l'aire du domaine compris entre les deux courbes est $\int_a^b (f(x) - g(x)) dx$.

Exemple : entre $f(x) = x$ et $g(x) = x^2$ sur $[0 ; 1]$: $\int_0^1 (x - x^2) dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ u.a.

III Valeur moyenne et applications

Définition

La **valeur moyenne** de f sur $[a ; b]$ ($a < b$) est :

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

Exemple - Énergie et puissance

Un moteur a une puissance $P(t) = 200 + 10t$ (en W) pour $t \in [0 ; 60]$ (en s). L'énergie consommée est

$$E = \int_0^{60} (200 + 10t) dt = [200t + 5t^2]_0^{60} = 12000 + 18000 = 30000 \text{ J.}$$

La puissance moyenne est $\frac{30000}{60} = 500$ W.

Remarque - Fonction définie par une intégrale

La fonction $F_a(x) = \int_a^x f(t) \, dt$ est l'unique primitive de f qui s'annule en a : $F'_a(x) = f(x)$.