

Logarithmes

Prélude - Historique et contexte

En 1614, John Napier publie les premières tables de logarithmes : elles transforment les produits en sommes et accélèrent considérablement les calculs des astronomes et des navigateurs. La règle à calcul, utilisée par les ingénieurs jusqu'aux années 1970, repose sur ce principe. Le logarithme permet de mesurer des grandeurs qui varient sur de très grandes échelles : niveau sonore en décibels, pH d'une solution, magnitude d'un séisme. Il sert aussi à calculer la demi-vie d'un élément radioactif.

I Logarithme népérien et décimal

Définition

- Pour tout $b > 0$, l'équation $e^x = b$ a une unique solution, notée $\ln(b)$: c'est le **logarithme népérien** de b .

$$e^x = b \iff x = \ln(b) \quad (b > 0)$$

- De même, $10^x = b \iff x = \log(b)$: c'est le **logarithme décimal**. On a $\log(b) = \frac{\ln b}{\ln 10}$.

Valeurs remarquables : $\ln 1 = 0$, $\ln e = 1$, $\ln(e^x) = x$, $e^{\ln x} = x$; $\log 1 = 0$, $\log 10 = 1$, $\log(10^n) = n$.

Propriétés algébriques

Pour $a > 0$, $b > 0$ et n entier (valables aussi pour $\log$) :

$\ln(ab) = \ln a + \ln b$	$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$	$\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$	$\ln(a^n) = n \ln a$
---------------------------	---	--	----------------------

Exemple

$$\ln 12 = \ln(4 \times 3) = 2\ln 2 + \ln 3. \quad \ln(e^3) - \ln(e) = 2. \quad \log(0,002) = \log 2 - 3 \approx -2,7.$$

II Équations et inéquations

Propriété

La fonction $\ln$ est strictement croissante sur $]0; +\infty[$; pour $a > 0$, $b > 0$:

$$a = b \iff \ln a = \ln b \quad a < b \iff \ln a < \ln b.$$

Exemples

- $e^{2x-1} = 5 \iff 2x-1 = \ln 5 \iff x = \frac{1+\ln 5}{2} \approx 1,30.$
- $1,05^n > 2 \iff n \ln 1,05 > \ln 2 \iff n > \frac{\ln 2}{\ln 1,05} \approx 14,2$: à partir de $n = 15$.
- $0,9^n < 0,01 \iff n \ln 0,9 < \ln 0,01 \iff n > \frac{\ln 0,01}{\ln 0,9} \approx 43,7$ (on change le sens car $\ln 0,9 < 0$).

Exemple - Demi-vie

Le nombre de noyaux radioactifs est $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$. La demi-vie T vérifie $N(T) = \frac{N_0}{2} : e^{-\lambda T} = \frac{1}{2} \iff$

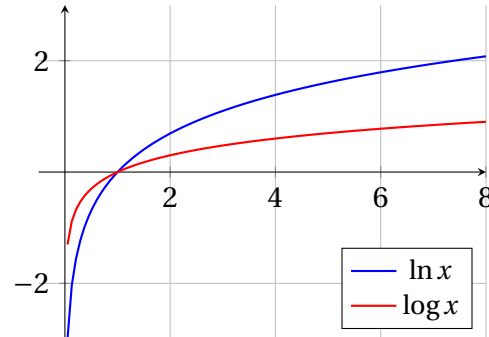
$$T = \frac{\ln 2}{\lambda}.$$

Pour l'iode 131, $\lambda \approx 0,0862 \text{ jour}^{-1} : T \approx 8,04 \text{ jours}$.

III Étude de la fonction ln

Propriété

- ln est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.
- Limites : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$.
L'axe des ordonnées est asymptote verticale.
- Croissances comparées : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$.
- $\ln x < 0$ sur $]0; 1[$ et $\ln x > 0$ sur $]1; +\infty[$.



Exemple - Mélange de polynôme et de logarithme

$$f(x) = x - 2 \ln x \text{ sur }]0; +\infty[. \quad f'(x) = 1 - \frac{2}{x} = \frac{x-2}{x}.$$

Sur $]0; +\infty[$, $f'(x)$ est du signe de $x-2$: f est décroissante sur $]0; 2]$ et croissante sur $[2; +\infty[$, de minimum $f(2) = 2 - 2 \ln 2 \approx 0,61$.

Limites : en 0^+ , $-2 \ln x \rightarrow +\infty$ donc $f(x) \rightarrow +\infty$; en $+\infty$, $f(x) = x \left(1 - 2 \frac{\ln x}{x}\right) \rightarrow +\infty$.

x	0	2	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	
$f(x)$	$+\infty$	$2 - 2 \ln 2$	$+\infty$

Exemple - Niveau sonore

$L = 10 \log \left(\frac{I}{I_0} \right)$ dB. Deux machines identiques de 80 dB chacune produisent $80 + 10 \log 2 \approx 83$ dB.